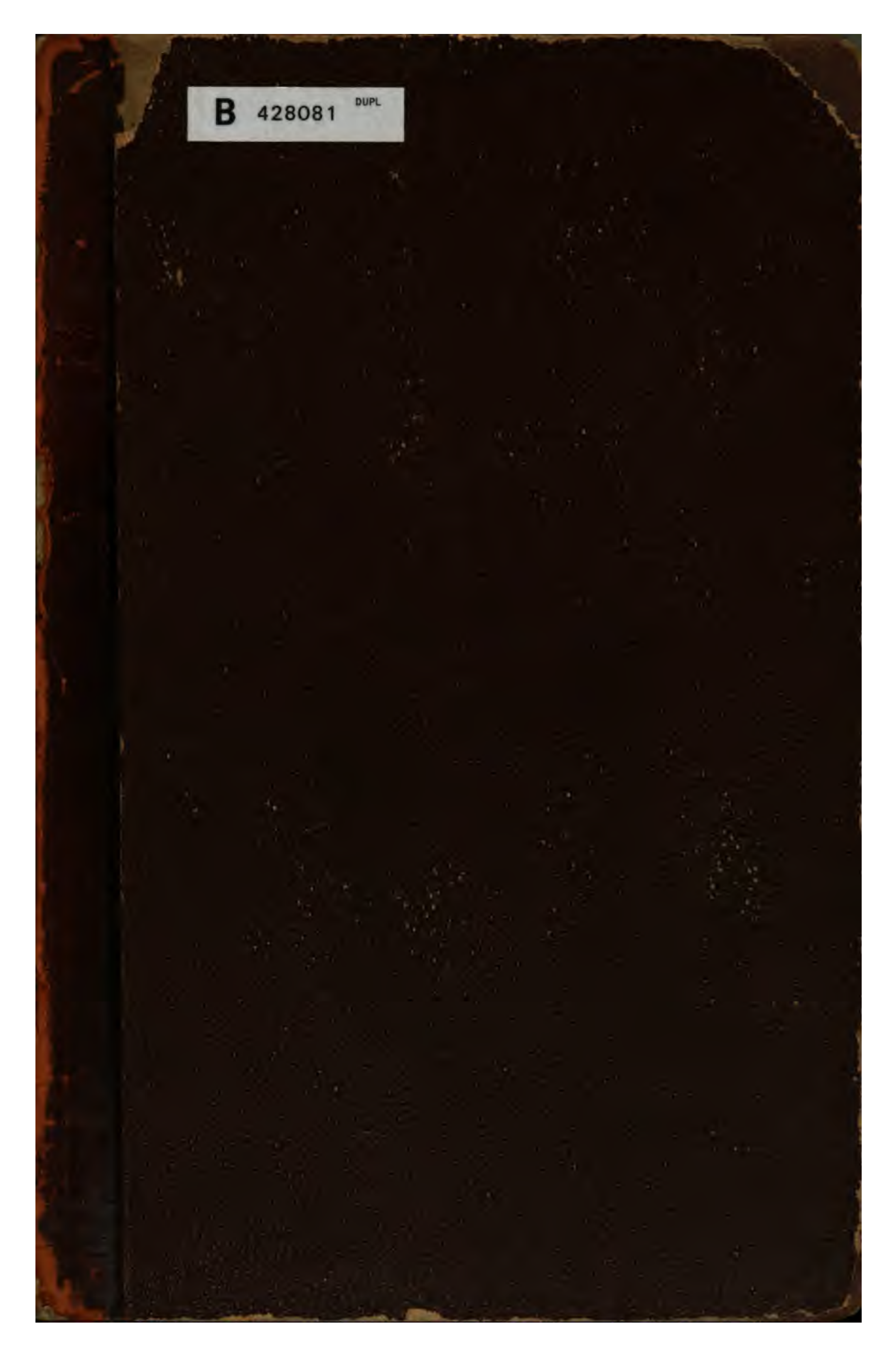
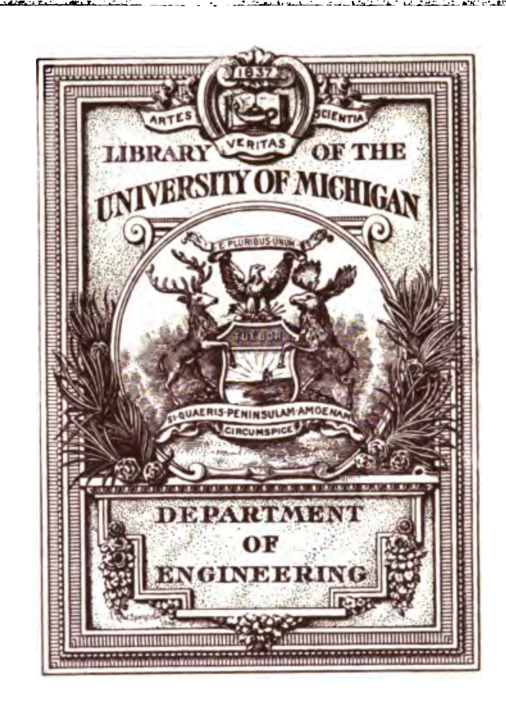



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING

Arthur-Egmont-Kiefer.
stud. Tech.
Cruhe. 76/77



DIE
FESTIGKEITSLEHRE.

DIE

FESTIGKEITSLEHRE

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE

DES

MASCHINENBAUES.

ABRISS VON VORTRÄGEN AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE
ZU CARLSRUHE

VON

D^R. F. GRASHOF.

MIT 40 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

BERLIN, 1866.

VERLAG VON RUDOLPH GAERTNER.

AMELANG'SCHE SORTIMENTS-BUCHHANDLUNG.

LEIPZIGER STRASSE No. 133.

VORWORT.

Bei der Ausarbeitung und Herausgabe des vorliegenden Buches leitete mich zunächst die Absicht, meinen Zuhörern für einen Theil meiner Vorträge an dem hiesigen Polytechnikum damit einen Leitfaden in die Hand zu geben, worin die leitenden Principien der betreffenden Untersuchungen in präciserer Form und die Resultate vollständiger und fehlerfreier niedergelegt seien, als solches in den nachgeschriebenen Heften gewöhnlich erreicht wird. Der erläuternde mündliche Vortrag soll dadurch nicht entbehrlich gemacht werden, und es sind deshalb die mathematischen Entwickelungen im Allgemeinen hier nur angedeutet worden. Bei der knappen Form und der grösseren Uebersichtlichkeit des Gedankenganges und der gewonnenen Resultate, welche dadurch im Vergleich mit einem ausführlichen Lehrbuche ermöglicht wurden, hoffe ich, dass das Buch zugleich als Rathgeber für den praktischen Gebrauch geeignet befunden werden möchte, indem es vor einer nackten Sammlung von Regeln und Formeln das voraus hat, dass die den Resultaten zu Grunde liegenden Anschauungen, Voraussetzungen, Vernachlässigungen etc. überall vollständig dargelegt sind und dadurch die Unsicherheiten und Missverständnisse vermieden werden, denen die Benutzung nackter Formelsammlungen so häufig ausgesetzt ist. Zum Selbststudium setzt das Buch solche Leser voraus, welche in der Analysis insoweit bewandert sind, als auf unseren technischen Hochschulen die Gelegenheit geboten zu sein pflegt; d. h. es werden Leser von dem angedeuteten Grade mathematischer Ausbildung vorausgesetzt, sofern dieselben beanspruchen, nicht nur die Resultate mit Verständniss benutzen, sondern auch deren Entwickelung überall vollständig übersehen und nach den gegebenen Andeutungen allenfalls selbst ergänzen zu können.

Nach diesen Zwecken und Voraussetzungen ist die Fassung des Buchs zu beurtheilen. Wenn ich es einen „Abriss“ genannt habe, so bezieht sich dies nur auf den absichtlichen Mangel einer ausführlichen mathematischen Entwickelung, während der Inhalt mehr umfasst, als sich in einem Semestralvortrage von wöchentlich 4 Stunden mit Gründlichkeit verarbeiten lässt. Eine Auswahl ist deshalb beim Vortrage geboten, lässt sich aber auch leicht treffen mit Rücksicht darauf, dass manche Abschnitte bei dem vorauszusetzenden Standpunkte der Zuhörer nur einer Andeutung bedürfen, um dem eigenen Studium überwiesen werden zu können; darin besteht eben ein Hauptvortheil eines solchen Leitfadens, besonders für die in ihren einzelnen Theilen in loserem Zusammenhange stehenden Lehrfächer der angewandten Mathematik und Mechanik, dass der Vortrag sich mit grösserer Ausführlichkeit nur über diejenigen Theile zu verbreiten braucht, welche von principieller Wichtigkeit sind, deren Entwickelung neue Gesichtspunkte und Methoden zur Geltung bringt oder welche mit grösseren Schwierigkeiten verbunden ist. Ein Hauptgewicht scheint mir hierbei darauf gelegt werden zu müssen, dass die Vorbereitungen, welche der erfolgreichen Behandlung einer Aufgabe oder einer Gruppe von Aufgaben vorauszugehen haben, die Voraussetzungen, worauf die Entwickelung beruht, und die Vernachlässigungen, welche zur Erzielung praktisch brauchbarer Resultate als nöthig sich heraus stellen, in ihrem Wesen und in ihren Folgen mit Sorgfalt discutirt werden, indem eben nur durch die hiermit verbundenen Schwierigkeiten die angewandte Mechanik ihre Berechtigung als besondere Wissenschaft erhält im Gegensatze zur reinen Mathematik und analytischen Mechanik, deren Methoden und Sätze für sie nur Mittel zum Zweck sind.

Die besonderen Anwendungen machen, wenn auch die wichtigsten und am häufigsten im Maschinenbau vorkommenden Dimensionsbestimmungen dadurch berührt werden, doch auf Vollständigkeit keinen Anspruch; sie sind nur als Beispiele in die systematische Behandlung der allgemeineren Aufgaben eingefügt, indem die betreffenden Nummern mit kleinerer Schrift gesetzt sind, damit die Uebersichtlichkeit der allgemeinen Entwickelung möglichst wenig durch diese Einschaltungen gestört werde. Zur Erleichterung des Nachschlagens für den praktischen Gebrauch ist dem systematischen Inhaltsverzeichnisse eine alphabetische Aufzählung jener besonderen Anwendungen beigefügt worden. In Betreff der Behandlung dieser letzteren und namentlich der vielfach einzuführenden Erfahrungscoefficienten habe ich zu bemerken, dass ich mich dabei den „Resultaten Redtenbachers“, meines hochverdienten Vorgängers auf hiesigem Lehrstuhle, welche Resultate mit Recht nach

wie vor beim Construiren in unserer Maschinenbauschule vorzugsweise zu Grunde gelegt werden, so viel als möglich angeschlossen habe, d. h. sofern nicht wesentliche Gründe eine Abweichung nöthig zu machen schienen oder eine rationellere und correctere Behandlung ermöglicht wurde durch die im vorliegenden Buche vielfach erweiterte theoretische Grundlage für die fraglichen besonderen Aufgaben.

Wenn es sich bei Abfassung des Buches nicht in erster Reihe um einen an den Gang des Vortrages sich anschliessenden Leitfaden gehandelt hätte, so würde ich es vorgezogen haben, mit den erst im 6. Capitel abgehandelten allgemeinen Beziehungen zwischen den Spannungen, Ausdehnungen und Verschiebungen im Inneren eines durch äussere Kräfte angegriffenen elastischen Körpers den Anfang zu machen, darauf die allgemeine Discussion des Verhaltens eines irgendwie belasteten stabförmigen Körpers (das de Saint-Vénant'sche Problem) folgen und hieran erst die in den 5 ersten Capiteln behandelten einfachen Fälle sich anschliessen zu lassen; es hätten dadurch mehrere Wiederholungen vermieden werden können, sowie auch manche Voraussetzungen und Vernachlässigungen, welche an den Stellen, wo sie eingeführt wurden, noch kaum in ihrer wahren Bedeutung und in ihren Folgen übersehbar waren, dadurch von vornherein in ein helleres Licht gesetzt worden wären. Die Bedürfnisse des Unterrichts und der Studienplan unserer Schule liessen gleichwohl eine solche an und für sich rationellere Anordnung des Stoffs weniger zweckmässig erscheinen; weil nämlich die Festigkeitslehre, wie die angewandte Mechanik überhaupt, passender Weise nicht wohl eher zum Vortrage gebracht werden kann, bevor nicht die rein mathematischen Lehrfächer und die analytische Mechanik ihren Abschluss gefunden haben, so bringen es hier wie ohne Zweifel auch an anderen polytechnischen Schulen die Verhältnisse mit sich, dass zugleich mit der Festigkeitslehre in demselben Semester auch schon die Elemente des Maschinenbaues zum Vortrage und zur Uebung im Constructionssaale gelangen müssen, so dass es nöthig ist, sobald als möglich zur Begründung derjenigen einfacheren Constructionsregeln zu gelangen, welche bei jenem Vortrage und den sich anschliessenden Uebungen am häufigsten benutzt werden. Der mehr wissenschaftliche Gang bei der Behandlung der Festigkeitslehre vom Allgemeinen zum Besonderen würde zudem auf den vorwiegend der praktischen Anwendung zugewandten Sinn unserer Zuhörer vielfach abschreckend wirken, indem dabei nicht nur die Früchte erst an späterer Stelle gepflückt werden könnten, sondern auch die grösseren Schwierigkeiten gerade im Anfange sich häufen würden.

Die ziemlich ausführliche Einleitung ist dazu bestimmt, die Mängel der gewählten Anordnung des Stoffs einigermassen zu heben, indem darin die allgemeine Aufgabe und die Art ihrer Behandlung wenigstens vorweg angedeutet sind und die in den ersten Capiteln behandelten Aufgaben in ihrem Charakter als einfache Specialfälle eines allgemeineren Problems deutlicher hervortreten; zugleich wird dadurch Gelegenheit geboten, die wichtigsten Definitionen von vorn herein in der nöthigen Allgemeinheit aufzustellen.

Was überhaupt die Behandlungsweise und die Begrenzung des Stoffs betrifft, so bin ich bemüht gewesen, die Anforderung einer streng wissenschaftlichen Behandlung mit der Rücksicht auf das praktische Bedürfniss, auf den durchschnittlichen Grad der mathematischen Bildung und Fassungskraft unserer Zuhörer und auf die für den Vortrag in beschränktem Masse disponible Zeit möglichst zu vermitteln. Eine ganz strenge Entwickelung, deren völliges Verständniss ohne weitere Erläuterung freilich bei der knappen Darstellung einen vorgeschrittenen Grad mathematischer Bildung voraussetzt, habe ich im 7. Capitel nur der einfachsten Körperform, dem geraden stabförmigen Körper, zu Theil werden lassen, wofür mir solches bei der vorwiegenden constructiven Wichtigkeit dieser Form sowie auch deshalb unerlässlich schien, weil dadurch allein eine klare Beurtheilung und nachträgliche bedingungsweise Rechtfertigung der in den ersten Capiteln zugelassenen Vernachlässigungen erreicht werden konnte. Eine ähnliche strenge und allgemeinere Behandlung auch bei den plattenförmigen Körpern würde indessen mit den so eben erwähnten Rücksichtnahmen kaum vereinbar gewesen sein; es schien nöthig, hier von vorn herein durch vereinfachende Annahmen die Schwierigkeiten der analytischen Entwickelungen zu vermindern.

Immerhin wird man finden, dass besonders in den letzten Capiteln grössere Anforderungen an die mathematische Bildung und an die geistige Anstrengung der Zuhörer oder Leser gestellt werden, als es in den für Techniker bestimmten Lehrbüchern der angewandten Mechanik zu geschehen pflegt; ja es werden die Gesetze des 6. und die Aufgaben des 7. Capitels meistens überhaupt nicht wissenschaftlich behandelt, indem die letzteren vielmehr dem praktischen Gefühl nach empirischen Regeln überlassen zu werden pflegen. Auch bin ich darauf gefasst, dem Urtheile zu begegen, dass ich darin zu weit gegangen sei. Abgesehen davon indessen, dass für mässigere Ansprüche die 5 ersten Capitel allenfalls als ein für sich abgeschlossenes Ganzes betrachtet werden können, in welchen, freilich mit manchen weiteren Ausführungen, im Wesentlichen diejenigen Probleme abgehandelt sind, auf welche sich die

technischen Lehrbücher der angewandten Mechanik bisher zu beschränken pflegten, hängt das Urtheil über den in Rede stehenden Punkt mit einer allgemeineren Principienfrage zusammen, betreffend den Grad der wissenschaftlichen Ausbildung überhaupt, welchen unsere polytechnischen Schulen den angehenden Technikern ermöglichen sollen. In dieser Beziehung gehe ich von der Ueberzeugung aus, dass, wenn die wissenschaftliche Bildung und die praktische Uebung und Geschicklichkeit zugleich in der beschränkt disponiblen Zeit sich nicht in vollem Umfange erreichen lassen, naturgemäss die erstere selbst bis zu gewissem Grade auf Kosten der letzteren Richtung von der Schule zu cultiviren sei, indem in der Praxis nachher die Uebung von selbst kommt, während nur selten Zeit, Gelegenheit und Neigung vorhanden sind, eine mangelhafte wissenschaftliche Bildung neben der Ausübung des praktischen Berufs noch wesentlich zu ergänzen. Auch würde die Schule ihre Aufgabe schlecht erfüllen, wenn sie sich mit einer solchen Ausbildung der angehenden Techniker begnügte, welche dieselben befähigt, die bei dem zeitigen Zustande des betreffenden Fachs ihnen gewöhnlich vorkommenden Aufgaben nach gelernten Regeln mit Verständniss zu lösen; wenn vielmehr der Fortschritt auf dem Gebiete der Technik nicht nur von der Zufälligkeit auftauchender Talente abhängen, sondern von der Schule wesentlich gefördert werden soll, so müssen die von ihr gebildeten Techniker im Stande sein, die Literatur ihres Fachs mit selbständigem Urtheile zu studiren und zu prüfen, sie müssen befähigt sein, auch in schwierigen und neuen Aufgaben, die sich ihnen darbieten ohne dass ihnen dafür eine unmittelbar passende Regel zur Hand ist, mit Leichtigkeit und klarem Verständnisse der massgebenden Verhältnisse sich zurecht zu finden. Mit einem Worte, die polytechnische Schule soll nicht im Schlepptau des praktischen Bedürfnisses, sondern umgekehrt demselben möglichst voraus sein; die von ihr gewährte wissenschaftliche Ausbildung soll nicht nur den Anforderungen der Technik in ihrer augenblicklichen Entwickelungsphase, sondern möglichst bis zu dem Augenblicke noch genügen, in welchem die von ihr gebildeten Techniker nach einem Menschenalter von der Bühne ihrer Thätigkeit abtreten.

Es soll hiermit nicht gesagt sein, dass jeder Studirende des Polytechnikums genöthigt sein solle, an allen den Vorträgen und Uebungen Theil zu nehmen, durch welche ihm zu dem grösstmöglichen Grade wissenschaftlicher Ausbildung für das von ihm gewählte Fach die Gelegenheit geboten wird, dass nicht vielmehr den verschiedenen persönlichen Verhältnissen, Anlagen und Zwecken besonders Derjenigen,

welche für einen Zweig der technischen Privatpraxis sich ausbilden wollen, gebührende Rechnung getragen werden solle. Doch ist hier nicht der Ort, auf solche die Organisation der Schule berührende Fragen näher einzugehen.

Schliesslich habe ich noch die neueren Arbeiten namhaft zu machen, welche ich bei Abfassung des vorliegenden Buches vorzugsweise benutzt habe, abgesehen nämlich von denjenigen älteren, welche namentlich seit Navier's Vorgange mehr oder weniger lange schon Gemeingut der einschlagenden Literatur geworden sind. Hier habe ich vor Allem die „Theorie der Elasticität fester Körper" von Clebsch zu erwähnen, welcher ich namentlich bei der Darstellung des de Saint-Vénant'schen Problems im 7. Capitel im Wesentlichen gefolgt bin; im 6. Capitel habe ich mich grossentheils der sehr übersichtlichen Darstellung von Holtzmann in seinem Lehrbuche der theoretischen Mechanik angeschlossen; an verschiedenen Stellen (bei der Behandlung krummer stabförmiger und symmetrisch gestalteter plattenförmiger Körper) haben Abhandlungen von Winkler im „Civilingenieur" mir schätzbare Anhaltspunkte geliefert. Auf die mir eigenthümlichen Untersuchungen, welche hier grossentheils zum ersten Male publicirt werden, brauche ich Kenner nicht besonders aufmerksam zu machen, deren wohlwollender Beurtheilung das Werkchen hiermit empfohlen sein möge.

Carlsruhe, im October 1865.

F. Grashof.

INHALT.

Cap. VIII. Arbeit der inneren Kräfte.

Besondere Anwendungen.

EINLEITUNG.

1. — **Materielle Punkte** heissen die kleinsten gleichartigen materiellen Theilchen, woraus ein Körper bestehend gedacht werden kann. **Cohäsion** im weiteren Sinne*) heisse die den Körpern eigenthümliche innere Kraft, vermöge welcher sie einer durch äussere Kräfte verursachten Verrückung ihrer materiellen Punkte einen gewissen Widerstand entgegensetzen.

Bei einem **festen Körper**, wovon im Folgenden allein die Rede ist, äussert sich eine solche Verrückung der materiellen Punkte durch eine entsprechende **Formänderung**, dieses Wort im weitesten Sinne genommen, in welchem auch eine blosse Aenderung der Grösse bei ähnlich bleibender Gestalt des Körpers darunter verstanden werden soll. Die Inanspruchnahme eines Körpers durch beliebige äussere Kräfte heisse seine **Belastung**.**)

Die Formänderung, deren ein Körper bei einer gewissen Belastung fähig ist, tritt nicht augenblicklich, sondern nur allmählich ein und nimmt unter Umständen selbst nach langer Zeit noch nachweisbar zu. Unter der **einer gewissen Belastung entsprechenden Formänderung** ist deshalb streng genommen die Grenze zu verstehen, welcher sich dieselbe im Verlaufe der Zeit nähert.

Bei solchen Körpern und solchen Belastungen, wie sie in der technischen Praxis vorkommen, pflegt indessen schon nach sehr kurzer Zeit die Formänderung bei andauernder Belastung von jener Grenze so wenig verschieden zu sein, dass der Unterschied ausser Acht gelassen werden darf.***)

---

*) Im **engeren** Sinne versteht man unter Cohäsion nur die Widerstandskraft gegen eine Vergrösserung des Abstandes der materiellen Punkte.

**) Mit Erweiterung des gewöhnlichen Sprachgebrauchs, nach welchem unter Belastung nur die Inanspruchnahme durch Schwerkräfte verstanden wird.

***) Nach Versuchen von C. F. **Dietzel** (Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. I. p. 165) ist dieser Einfluss der Zeit auf die Formänderung bedeutender bei Holz (überhaupt bei organischen Körpern), als bei Metallen.

Dass bei sehr starker Belastung die Formänderung bei allen Körpern, auch Metallen, noch lange Zeit, selbst Monate lang merklich zunimmt und schliesslich so die Aufhebung des den festen Körper charakterisirenden Zusammenhangs herbeigeführt werden kann, ist eine bekannte Thatsache. **Fairbairn** hat gezeigt, dass diese Wirkung durch häufige und bedeutende Aenderungen der Temperatur befördert wird. (Seventh Report of the British Association.)

Man sagt, ein Körper verhalte sich vollkommen oder unvollkommen elastisch bei einer gewissen Formänderung, jenachdem dieselbe vollkommen oder nur unvollkommen wieder verschwindet, wenn die Belastung aufgehoben wird. Im ersteren Falle heisst die ganze Cohäsion, welche bei der betreffenden Belastung zur Wirkung gekommen war, auch Elasticität, im letzteren Falle nur derjenige Theil derselben, welcher dem rückgängig gewordenen Theile der Formänderung entspricht und eben diesen theilweisen Rückgang verursacht.

Die Cohäsion kommt wie jede Widerstands- oder secundäre Kraft jedesmal nur mit derjenigen Intensität zur Wirkung, welche der Belastung oder der primären Kraft entspricht. Wird die Belastung gesteigert, so erfolgt schliesslich eine Trennung der materiellen Punkte, d. h. eine stellenweise Aufhebung des Zusammenhangs, welcher den festen Körper als solchen charakterisirt, und erst im letzten Augenblicke vorher war die Cohäsion mit dem Maximum ihrer Intensität zur Wirkung gekommen.

Die zur vollen Wirkung gekommene Cohäsion, also die innere Kraft, mit welcher ein fester Körper der Trennung seiner materiellen Punkte Widerstand leistet, heisst seine Festigkeit.*)

Die inneren Kräfte, welche durch eine gewisse Belastung eines Körpers zur Wirkung kommen, treten zwischen je zwei materiellen Punkten auf und sind einzeln ebenso unbestimmt und unbestimmbar wie die Massenhaftigkeit der materiellen Punkte, woraus man sich den Körper bestehend denkt. Die obigen Definitionen der Cohäsion, Elasticität und Festigkeit beziehen sich daher auf gewisse im Körper anzunehmende Flächen, d. h. die damit bezeichneten inneren Kräfte sind die Resultanten aller jener unendlich vielen Elementarkräfte, welche auf die in einer solchen Fläche liegenden materiellen Punkte von allen übrigen auf derselben Seite der Fläche liegenden materiellen Punkten ausgeübt werden; damit eine resultirende Kraft mit verschwindend kleinem Fehler ohne Kräftepaar sich bilden lasse, muss im Allgemeinen die Fläche als unendlich klein vorausgesetzt werden.

2. — Genauere Versuche haben zu dem Schlusse geführt, dass der Begriff der vollkommenen Elasticität streng genommen der Wirklichkeit nicht entspricht, dass vielmehr jede Formänderung von endlicher Grösse aus einem bleibenden und einem nicht bleibenden Theile besteht in der Weise, dass das Verhältniss des ersten zum zweiten sich nur zugleich mit der ganzen Formänderung der Grenze Null nähert.**) Nichtsdestoweniger pflegt man

*) Nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche versteht man unter Elasticität und Festigkeit die Eigenschaft, solche innere Kräfte in höherem oder niederem Grade äussern zu können, welche hier als Elasticität und Festigkeit selbst definirt wurden.

**) In noch höherem Grade ist es unzulässig, die Körper selbst in vollkommen und unvollkommen elastische zu unterscheiden, weil selbst dann, wenn der Begriff der vollkommenen Elasticitat factisch begründet wäre, er doch immer nur relativ sein würde, indem derselbe Körper bei kleiner Formänderung sich vollkommen, bei grosser sich unvollkommen elastisch verhalten könnte. Höchstens darf von sehr elastischen und wenig elastischen Körpern gesprochen werden, jenachdem erst bei grosser oder schon bei kleiner Formänderung ein wesentlicher Theil derselben bleibend wird.

eine gewisse Grenze der Formänderung anzunehmen, innerhalb welcher ihr bleibender Theil verhältnissmässig so klein ist, dass er nur durch sehr feine Beobachtungsmittel nachgewiesen und deshalb mit einem für die Anforderungen der Praxis verschwindend kleinen Fehler = Null gesetzt werden kann. Diese Grenze nennt man kurzweg die Elasticitätsgrenze.

Wenn übrigens ein Körper eine Formänderung erfahren hatte, von der ein Theil zurückgeblieben ist, und dieser Körper dann einer neuen Formänderung von derselben Art, aber höchstens von der früheren Grösse unterworfen wird, so ist der bleibende Theil der letzteren sehr klein im Vergleich mit dem früheren, so dass die bleibende Formänderung durch Wiederholung solchen Verfahrens nicht etwa beliebig gesteigert werden kann.

Bei allen Constructionen pflegt man im Princip die Forderung zu Grunde zu legen, dass in keinem Theile eine Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze stattfinden solle; in der That freilich ist jener Forderung wegen mangelhafter Kenntniss dieser Grenze, selbst abgesehen von der Unbestimmtheit ihres Begriffs*), nicht immer sicher zu entsprechen und vielmehr häufig nur die leichter bestimmbare und sicherer bekannte Festigkeit des Materials als massgebend zu Grunde zu legen.

3. — Die Formänderung, welche durch eine gewisse Belastung eines Körpers bewirkt wird, lässt sich immer darauf zurückführen, dass die ursprünglichen Abstände der materiellen Punkte geändert werden, welche Aenderungen theils positiv, theils negativ und sowohl in demselben Punkte nach verschiedenen Richtungen, als in verschiedenen Punkten nach gleichlaufenden Richtungen verschieden gross sein können.

Zieht man von einem materiellen Punkte A eines Körpers eine Gerade AB und betrachtet dieselbe als den geometrischen Ort der darin liegenden materiellen Punkte,**) so erfährt sie bei der Formänderung des Körpers eine entsprechende Formänderung, u. A. das beliebige Stück AB derselben eine gewisse Längenänderung $\Delta(AB)$; lässt man AB abnehmen bis zur Grenze Null, so heisst der entsprechende Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{\Delta(AB)}{AB}$ die Ausdehnung des Körpers im Punkte A nach der Richtung AB.

Eine solche Ausdehnung (stets ein kleiner Bruch) ist positiv oder negativ, eine Ausdehnung im engeren Sinne oder eine Zusammenziehung, und soll algebraisch verstanden in der Folge mit ε bezeichnet werden; ε' bedeute insbesondere eine positive, ε'' den Absolutwerth einer negativen Ausdehnung.***)

---

*) Derselbe liesse sich dadurch bestimmen, dass ein bestimmter Grenzwerth des Verhältnisses der bleibenden zur ganzen Formänderung als Kriterium festgestellt würde.

**) Linien, Flächen oder Körperelemente, welche als die geometrischen Oerter der in ihnen liegenden materiellen Punkte betrachtet werden, heissen in der Folge kurzweg materielle Linien, Flächen oder Körperelemente.

***) Die als unbenannte Zahl definirte Ausdehnung im Punkte A nach der Richtung AB kann auch betrachtet werden als Länge, nämlich als positive oder negative Verlängerung, welche die materielle Gerade AB = der Längeneinheit erfahren würde, wenn

Man kann jetzt auch sagen: jede Formänderung eines Körpers kann auf Ausdehnungen zurückgeführt werden, welche in den verschiedenen Punkten nach den verschiedenen Richtungen stattfinden.

4. — Als Ursache der bleibenden Formänderungen eines Körpers muss angenommen werden, dass gewisse Werthe von ε' und ε'' entsprechende neue Gleichgewichtslagen der materiellen Punkte bedingen, welche von ihnen eingenommen werden, wenn die betreffenden Belastungen aufhören; diejenigen Grenzwerthe von ε' und ε'', welche man als der Elasticitätsgrenze entsprechend annimmt und welche unter sich verschieden sein können, mögen mit (ε') und (ε'') bezeichnet werden.*)

Die Grenzwerthe (ε') und (ε'') können im Allgemeinen sowohl mit der Lage des betreffenden Punktes A, als mit der betreffenden Richtung AB sich ändern. Bei einem homogenen, d. h. einem in allen Punkten gleich beschaffenen Körper sind sie nur vom Materiale und von der Richtung, bei einem isotropen, d. h. einem nach allen Richtungen gleich beschaffenen homogenen Körper sind sie nur vom Materiale abhängig.

5. — Auf Grund der in No. 2 ausgesprochenen principiellen Forderung und der Aufstellungen in No. 4 lässt sich nunmehr die Hauptaufgabe der praktischen Festigkeitslehre so aussprechen: Es sollen die Form, die Dimensionen oder die Belastung eines Constructionsgliedes unter gegebenen Umständen so bestimmt werden, dass ε' und ε'' in keinem Punkte und nach keiner Richtung gewisse erfahrungsmässig zulässige Werthe überschreiten, welche bei nur homogenem Materiale ausser von diesem auch von der Richtung, bei isotropem Materiale nur von diesem abhängen,**) principiell aber jedenfalls kleiner sein sollen, als die Grenzwerthe (ε') und (ε''), welche der Elasticitätsgrenze entsprechen.

Die zweite Aufgabe: Bestimmung der Formänderung eines gegebenen Körpers bei gegebener Belastung ist zwar an und für sich gewöhnlich nur von untergeordneter praktischer Wichtigkeit, doch giebt es viele Fälle, in welchen die erste Aufgabe nicht ohne die zweite gelöst werden kann, und zwar ist dies immer dann der Fall, wenn die bei den Unterstützungen oder Befestigungen des Körpers durch die primären belastenden Kräfte hervor-

---

in allen ihren Punkten ihre Ausdehnung gleich wäre. In diesem Sinne soll die Ausdehnung insbesondere specifische Ausdehnung heissen. Das Beiwort „specifisch" gebraucht der Verf. immer in dem Sinne, dass dadurch das Hauptwort (immer eine Grösse) auf die betreffende Einheit bezogen wird; z. B. specifisches Gewicht = Gewicht der Volumeinheit, specifisches Volumen = Volumen der Gewichtseinheit, specifischer Druck einer Flüssigkeit = Druck auf die Flächeneinheit etc.

*) Wie es zugeht, dass gewisse Werthe von ε die fraglichen Erscheinungen zur Folge haben, bleibt hierbei dahingestellt; es ist nur nöthig ausdrücklich hervorzuheben, dass eben bestimmte Werthe von ihnen jene Erscheinungen begleiten. Man könnte nämlich auch, was aber einen wesentlichen Unterschied machen würde (cf. No. 11), gewisse Werthe der inneren Kräfte als charakteristische Begleiter der fraglichen Erscheinungen hinstellen.

**) Abgesehen von praktischen Nebenrücksichten: cf. No. 21.

gerufenen Widerstände, welche stets als äussere Kräfte in Beziehung auf den Körper selbst mitgerechnet werden müssen, unbestimmt blieben, falls der Körper als absolut starr vorausgesetzt würde.

Von den in der Praxis angewendeten Constructionsmaterialien können gegossene Metalle unbedingt, geschmiedete und gewalzte näherungsweise als isotrop, Hölzer nur als homogen gelten.

Auf die etwas verschiedene Festigkeit, welche z. B. gewalztes Eisenblech nach der Walzrichtung und nach der darauf senkrechten Längenrichtung besitzt, mag bei der Ausführung einer Construction durch entsprechend vortheilhafte Lagerung der einzelnen Blechtafeln möglichst Rücksicht genommen werden, die Theorie darf aber im Allgemeinen davon abstrahiren. Gezogener Draht hat zwar in noch höherem Grade ein verschiedenes Verhalten nach der Länge und Quere; doch kommt hierbei überhaupt nur das Verhalten nach der Richtung der Länge in Betracht, und wenn es nicht der Fall wäre, so dürfte wenigstens nach der Längenrichtung eine ausgezeichnete Elasticitätsaxe vorausgesetzt werden, welche dadurch charakterisirt ist, dass nach je zwei Richtungen, die gleiche Winkel mit ihr bilden, ein gleiches Verhalten stattfindet. Dieselbe Voraussetzung ist auch beim Holze zulässig in der Weise, dass die ausgezeichnete Elasticitätsaxe nach der Richtung der natürlichen Fasern angenommen wird.

6. — Damit die in No. 5 bezeichnete Hauptaufgabe gelöst werden könne, muss man im Stande sein, bei gegebener Belastung eines gegebenen Körpers die Ausdehnungen zu berechnen, welche in einem beliebigen Punkte A nach allen möglichen Richtungen stattfinden, um so die grösste unter ihnen zu erkennen. Dies würde aber unmöglich sein, wenn zwischen den Ausdehnungen in einem Punkte nach allen möglichen Richtungen nicht solche Beziehungen stattfänden, dass die Kenntniss einer beschränkten Zahl von Elementen genügt, um damit jede solche Ausdehnung zu berechnen. Wie es möglich ist, zu solchen Elementen zu gelangen, lehrt folgende Betrachtung.

Denkt man im Inneren eines noch unbelasteten Körpers ein unendlich kleines materielles rechtwinkeliges Parallelepipedum abgegrenzt und verfolgt seine (verhältnissmässig immer sehr kleine) Formänderung bei der Belastung und entsprechenden Formänderung des Körpers, so ist zwar klar, dass dieselbe zunächst betrachtet werden kann als das Resultat von positiven oder negativen Ausdehnungen verschiedener Grösse, die nach allen möglichen Richtungen im Parallelepipedum stattfinden; sie lässt sich aber auch betrachten als Resultat von 1) nur 3 Ausdehnungen nach den Richtungen der Kanten, 2) gegenseitigen Verschiebungen der gegenüberliegenden Seitenflächen, 3) gegenseitigen Neigungen dieser Seitenflächen, welche früher parallel waren, 4) gegenseitigen Verdrehungen der gegenüberliegenden Flächen, 5) Wölbungen dieser ursprünglich ebenen Seitenflächen (wegen der Continuität des Körpers bei den gegenüberliegenden Flächen nothwendig nach derselben Richtung convex oder concav). Erwägt man aber, dass die Neigungen der Seitenflächen nur durch die Differenz der Ausdehnungen in parallelen Geraden, ihre Verdrehungen

nur durch die Verschiedenheit der Verschiebungen (nach Grösse und Richtung) in verschiedenen Punkten paralleler Ebenen, ihre Wölbungen nur durch die Differenz der Ausdehnungen in parallelen Geraden und der Verschiebungen in parallelen Ebenen innerhalb des unendlich kleinen Parallelepipedums bedingt und deshalb von verschwindend kleinem Einflusse sind im Vergleich mit den unter 1) und 2) genannten Aenderungen, so bleiben nur diese, also die Ausdehnungen nach den 3 Gruppen paralleler Kanten und die gegenseitigen Verschiebungen der 3 Paare paralleler Seitenflächen zu berücksichtigen übrig. Die Verschiebungen sind bestimmt durch Grösse und Richtung oder sie lassen sich zerlegen in je zwei Verschiebungen nach den Richtungen der zweierlei Kanten der betreffenden Seitenebenen, und da schliesslich die Formänderungen der 8 möglichen Parallelepipeda, welche einen Eckpunkt A gemeinschaftlich haben, wegen der Continuität des Körpers sich gegenseitig bedingen, nämlich nur unendlich wenig verschieden sind, so erkennt man vorläufig die Möglichkeit, die Ausdehnung in einem Punkte A nach einer beliebigen Richtung AB durch 9 Elemente auszudrücken (ausser durch die Winkel, welche die Richtung AB bestimmen), nämlich durch 3 Ausdehnungen und 6 Verschiebungen, die sich auf 3 zu einander senkrechte Richtungen beziehen.

7. — Die jetzt gewonnene Erkenntniss giebt Veranlassung zur näheren Betrachtung der Verschiebungen.

Ist F eine materielle Ebene in einem vorläufig unbelasteten Körper, A ein materieller Punkt in F und B ein anderer materieller Punkt, welcher so liegt, dass die Gerade AB senkrecht zu F ist, so findet durch die Belastung des Körpers im Allgemeinen eine solche Verrückung statt, dass das Perpendikel von B auf F einen neben A gelegenen Punkt A_1 von F trifft; die früher ebene Fläche F ist dabei im Allgemeinen krumm geworden. Lässt man AB abnehmen bis zur Grenze Null, so heisst der entsprechende Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{AA_1}{AB}$, welcher immer ein kleiner Bruch ist, die Verschiebung der Ebene F im Punkte A; unter der Ebene F ist dabei die Berührungsebene der Fläche F im Punkte A zu verstehen. Solche Verschiebungen werden in der Folge mit γ bezeichnet.*)

Ist AC eine Richtung in der Ebene F, welche mit der Richtung AA_1 den Winkel φ bildet, so ist $\gamma \cos\varphi$ die Verschiebung der Ebene F im Punkte A nach der Richtung AC; dieselbe ist positiv oder negativ mit $\cos\varphi$, da γ eine absolute Zahl ist.

*) Die als unbenannte Zahl definirte Verschiebung einer Ebene F im Punkte A kann auch betrachtet werden als Länge, nämlich als diejenige Strecke, um welche zwei parallele Ebenen im Abstande $AB =$ der Längeneinheit an den correspondirenden Punkten A und B gegeneinander verschoben werden würden, wenn die Verschiebungen aller dazwischen liegenden Parallelebenen in ihren betreffenden Durchschnittspunkten mit der Geraden AB gleich gross und gleich gerichtet wären. In diesem Sinne heisse die Verschiebung insbesondere specifische Verschiebung. Cf. No. 3, Anmerk.

8. — Wenn man bei einem unendlich kleinen materiellen rechtwinkeligen Parallelepipedum im Inneren eines Körpers die vom Eckpunkte A auslaufenden Kanten mit AX, AY, AZ bezeichnet, so seien bei der Belastung des Körpers und entsprechenden Deformation des Parallelepipedums, im Sinne von No. 7 verstanden, für den Punkt A:

γ_{xy} und γ_{xz} die Verschiebungen der Ebene YAZ nach den Richtungen AY und AZ,

γ_{yz} und γ_{yx} die Verschiebungen der Ebene ZAX nach den Richtungen AZ und AX,

γ_{zx} und γ_{zy} die Verschiebungen der Ebene XAY nach den Richtungen AX und AY.

Die Verschiebungen γ_{xy} und γ_{yx} lassen sich beide als Folge des Umstandes betrachten, dass der früher rechte Flächenwinkel an der Kante AZ $= \frac{\pi}{2} \mp \varphi$, etwas kleiner oder grösser als ein rechter Winkel, geworden ist; sie können also immer nur gleichzeitig vorhanden sein, und zudem lässt eine einfache Ueberlegung erkennen, dass sie einander gleich, nämlich beide $= cotg\left(\frac{\pi}{2} \mp \varphi\right)$ oder absolut genommen $= tg\varphi$, also auch mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung $= \varphi$ sind. Ebenso ist $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ und $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$.

Die 9 Elemente, zu denen die Betrachtung in No. 6 geführt hatte, reduciren sich also auf 6, und man erkennt die Möglichkeit, die Ausdehnung im Punkte A nach der Richtung AB, welche mit den Richtungen AX, AY, AZ die Winkel λ, μ, ν bildet, als Funktionen dieser Winkel und der 6 Elemente

$$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}$$

auszudrücken, unter ε_x, ε_y und ε_z die Ausdehnungen im Punkte A nach den Richtungen AX, AY und AZ verstanden.

9. — Diese 3 Ausdehnungen und 3 Verschiebungen können nur durch Vermittelung der inneren Kräfte gefunden werden, welche in den 3 um den Punkt A herumliegenden Seitenflächen des Parallelepipedums stattfinden und welche für einen Punkt A an der Oberfläche des Körpers in gewissen Beziehungen zu den daselbst angreifenden äusseren Kräften stehen müssen. Diese inneren Kräfte sind zweierlei, den Ausdehnungen und den Verschiebungen entsprechend.

Ist F eine Ebene in einem belasteten Körper, A ein Punkt in F, f der Inhalt eines den Punkt A einschliessenden Stücks von F und p die Resultante der an den Punkt A versetzten inneren Kräfte, den die von einer Seite angrenzenden Körpertheile auf die Elemente von f ausüben, so heisst die Grenze des Quotienten $\frac{p}{f}$, wenn f, den Punkt A stets einschliessend, in die Grenze Null übergeht, die **Spannung im Punkte** A **der Ebene** F.*)

*) Die als Quotient einer Kraft durch eine Fläche definirte Spannung kann auch als eine Kraft betrachtet werden, nämlich als diejenige innere Kraft, welche auf die Flächen-

Wird dieselbe in zwei Componenten zerlegt, so dass die Richtungslinie der einen senkrecht zu F ist und die der anderen in der Ebene F liegt, so heisst erstere die Normalspannung, letztere die Tangentialspannung im Punkte A der Ebene F.

Wenn man die von beiden Seiten her ausgeübten inneren Kräfte unterscheidet und die Richtung AB nach derjenigen Seite hin senkrecht zu F zieht, von welcher her man sich den Zug oder Druck durch die angrenzenden Körpertheile ausgeübt denkt, so entspricht die Normalspannung einem Zug oder Druck, jenachdem sie die Richtung AB oder BA hat. Um diesen zwei Fällen durch einen positiven oder negativen Werth zu entsprechen, wird für die Normalspannung im Punkte A der Ebene F die Bezeichnung: Spannung*) im Punkte A nach der Richtung AB eingeführt. Eine solche ist dann positiv oder negativ, jenachdem sie die Richtung AB oder die umgekehrte Richtung hat; im ersteren Falle heisst sie auch Spannung im engeren Sinne oder absolute Spannung, im letzteren Pressung oder rückwirkende Spannung. Solche Spannungen (Normalspannungen) werden in der Folge, algebraisch verstanden, mit σ bezeichnet; σ' bedeute insbesondere eine positive, σ'' den Absolutwerth einer negativen Spannung.

Tangentialspannungen werden mit τ bezeichnet; sie sind absolute Grössen. Ist aber AC eine Richtung in der Ebene F, welche mit der Richtung von τ den Winkel φ bildet, so ist die Tangentialspannung im Punkte A der Ebene F nach der Richtung $AC = \tau \cos \varphi$ eine positive oder negative Grösse, jenachdem φ ein spitzer oder stumpfer Winkel ist.

10. — Betrachtet man wieder das unendlich kleine materielle rechtwinkelige Parallelepipedum mit den Kanten AX, AY, AZ im Inneren eines Körpers, so werden bei der Belastung des Körpers auf die 6 Seitenflächen durch die umgebende Körpermasse gewisse innere Kräfte ausgeübt, und es seien für den Punkt A

σ_x σ_y σ_z die entsprechenden Spannungen nach den Richtungen XA, YA, ZA,

τ_{xy} und τ_{xz} die Tangentialspannungen der Ebene YAZ nach den Richtungen YA und ZA,

τ_{yz} und τ_{yx} die Tangentialspannungen der Ebene ZAX nach den Richtungen ZA und XA,

τ_{zx} und τ_{zy} die Tangentialspannungen der Ebene XAY nach den Richtungen XA und YA.

einheit der Ebene F ausgeübt werden würde, wenn in allen ihren Punkten die Spannung ebenso gross und ebenso gerichtet wäre wie im Punkte A. In diesem Sinne heisse sie insbesondere specifische Spannung. Cf. No. 3, Anmerk.

*) Die ausdrückliche Bezeichnung als Normalspannung ist hier unnöthig, weil die Bezeichnung der betreffenden Spannungsebene nicht fehlen dürfte, wenn eine resultirende oder eine Tangentialspannung gemeint wäre.

Durch diese 9 Spannungen und die Inhalte der Seitenflächen des Parallelepipedums lassen sich die inneren Kräfte ausdrücken, mit welchen die umgebende Körpermasse auf dasselbe einwirkt; je 2 in den gegenüberliegenden Flächen sich entsprechende dieser im Ganzen 2.9 = 18 Kräfte unterscheiden sich um unendlich kleine Grössen 3ter Ordnung, da die Kräfte selbst mit den Flächen unendlich klein 2ter Ordnung sind. Im Gleichgewichtszustande des ganzen belasteten Körpers muss nun auch an dem parallelepipedischen Körperelemente Gleichgewicht stattfinden zwischen den gedachten 18 Kräften an seiner Oberfläche und derjenigen Kraft (in der Regel nur der Schwerkraft), welche als äussere Kraft auf die Masse des Parallelepipedums selbst wirkt und welche mit dieser unendlich klein 3ter Ordnung ist. Vermittels der allgemeinen 6 Gleichgewichtsbedingungen eines Systems von Kräften erhält man also 6 Gleichungen zwischen den obigen 3 Normalspannungen und 6 Tangentialspannungen im Punkte A, von welchen drei, den in No. 8 erwähnten Beziehungen:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$$

entsprechend, einfach folgende sind:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Sie folgen sofort aus den Momentengleichungen in Beziehung auf die durch den Mittelpunkt des Parallelepipedums parallel seinen Kanten gezogenen Axen, in welche nur die zu diesen senkrecht und windschief gerichteten Tangentialspannungen mit unendlich kleinen Gliedern von der 3ten Ordnung eintreten, alle übrigen Spannungen aber nebst der auf die Masse des Parallelepipedums wirkenden äusseren Kraft mit unendlich kleinen Gliedern höherer Ordnung, die vernachlässigt werden.

Hiernach sind die noch übrigen 6 verschiedenen Spannungen für denselben Punkt A nur durch 3 Gleichungen verbunden, wodurch dieselben vermittels der für einen Punkt A an der Oberfläche des Körpers aufzustellenden Beziehungen zwischen ihnen und den äusseren Kräften noch nicht bestimmt sind. Liessen sich aber die 6 Spannungen σ und τ durch die 6 Grössen ε und γ, diese dagegen durch nur 3 neue Elemente ausdrücken, so würde die Aufgabe bestimmt sein, weil sich dann vermittels jener 3 Gleichungen zwischen den Spannungen und mit Hülfe der Oberflächenbedingungen die fraglichen 3 Elemente für jeden Punkt des Körpers finden liessen.

Solche 3 Elemente, wodurch die 6 Grössen ε und γ sich ausdrücken lassen, hat man nun in der That in den Verrückungen, welche der materielle Punkt A in Folge der Deformation des Körpers nach den Richtungen der Coordinatenaxen erleidet: die partiellen Differentiale dieser Verrückungen nach den Coordinaten des Punktes A, wovon sie der Continuität des Körpers wegen stetige Functionen sind, bestimmen nämlich offenbar die relativen Verrückungen der verschiedenen Eckpunkte des unendlich kleinen Parallelepipedums gegen einander und somit überhaupt die Formveränderung desselben.

11. — Zur Lösung der Aufgabe, die Ausdehnung ε in einem beliebigen Punkte A nach der beliebigen Richtung AB bei gegebener Belastung eines gegebenen Körpers zu bestimmen, ist also schliesslich noch die Kenntniss derjenigen Beziehungen nöthig, die zwischen den Ausdehnungen und Verschiebungen einerseits und den zweierlei Spannungen andererseits stattfinden, welche auf denselben Punkt A und dieselben drei zu einander senkrechten Richtungen AX, AY, AZ bezogen werden. Hierbei ist es unerlässlich, die Erfahrung mit zu Rathe zu ziehen.

Was zunächst die Beziehung zwischen Normalspannungen und Ausdehnungen betrifft, so ist es zwar selbstverständlich, dass ein auf einen Körper nach einer gewissen Richtung AB ausgeübter äusserer Zug oder Druck neben der positiven oder negativen Ausdehnung nach dieser Richtung auch eine solche nach jeder anderen Richtung zur Folge haben muss, welche um so kleiner ist, je mehr der Winkel zwischen dieser Richtung und der Richtung AB einem rechten sich nähert; die Erfahrung lehrt aber, dass nach jeder zu AB senkrechten Richtung nicht etwa die Ausdehnung = Null ist, sondern negativ im Falle des Zuges, positiv im Falle des Drucks nach der Richtung AB. Ist in einem Punkte A die Ausdehnung nach der Richtung AB des äusseren Zuges oder Drucks $= \varepsilon$, so ist sie nach irgend einer zu AB senkrechten Richtung AC etwa $= -\frac{\varepsilon}{m}$, unter m eine Zahl > 1 verstanden, welche bei einem isotropen Materiale nur von diesem, bei nur homogenem Materiale aber ausserdem von den Richtungen AB und AC abhängt.

Daraus folgt allgemein, dass z. B. ε_x nicht nur von σ_x, sondern auch von σ_y und σ_z abhängt, und dass also eine bestimmte Beziehung zwischen der Ausdehnung ε und der Spannung σ in einem Punkte A nach irgend einer Richtung AB nur dann stattfinden kann, wenn nach jeder zu AB senkrechten Richtung im Punkte A die Normalspannung = Null ist.

In diesem Falle lehrt die Erfahrung, dass in der That (abgesehen von dem in No. 1 erwähnten Einflusse der Zeit) einem bestimmten σ auch ein bestimmtes ε in demselben Punkte nach derselben Richtung entspricht und dass der Quotient $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ sowohl für positive wie für negative Werthe von σ und ε beinahe constant bleibt, so lange die Absolutwerthe von σ und ε nicht so gross sind, dass die sogenannte Elasticitätsgrenze erreicht wird. Streng genommen nimmt $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ ab, wenn σ und ε absolut genommen wachsen, und zwar nach einem Gesetze, welches für positive Werthe von σ und ε ein anderes sein kann, als für negative, bei einem nur homogenen Materiale auch verschieden für verschiedene Richtungen ist; jedenfalls ist es abhängig von der Art des Materials, indessen bisher noch nicht genügend festgestellt.

Die Grenze, welcher sich der Quotient $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ nähert, wenn die Absolutwerthe von σ und ε in die Grenze Null übergehen, wird mit E bezeichnet und heisst

der Elasticitätsmodul des Materials für die betreffende Richtung, wenn dasselbe nur homogen ist, oder kurzweg der Elasticitätsmodul des Materials, wenn dieses als isotrop angenommen wird.*)

Innerhalb der bei den praktischen Anwendungen zulässigen Grenzwerthe von σ und ε, worauf sich die Rechnungen der Festigkeitslehre beziehen, wird immer $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ gesetzt.**)

12. — Die Beziehung zwischen Tangentialspannungen und Verschiebungen ist einfacher, als die zwischen Normalspannungen und Ausdehnungen. Beziehen sich nämlich τ und γ auf denselben Punkt derselben Ebene und dieselbe Schubrichtung der letzteren, so ist γ durch τ bestimmt, also nicht auch von anderen gleichzeitigen Spannungen abhängig, und der Quotient $\frac{\tau}{\gamma}$ nähert sich, wenn τ und γ bis Null abnehmen, einer gewissen Grenze, welche der Schubelasticitätsmodul genannt und mit G bezeichnet werden soll. Er ist bei isotropem Materiale nur von diesem, bei nur homogenem aber ausserdem von der betreffenden Ebene und deren Schubrichtung abhängig. Die in No. 11 und 12 besprochenen Constanten m, E und G stehen in einer gewissen Abhängigkeit von einander: cf. No. 168.

Bei solchen Belastungen und entsprechenden Formänderungen, welche sich innerhalb der Elasticitätsgrenze halten, kann ohne wesentlichen Fehler $\frac{\tau}{\gamma} = G$ gesetzt werden.

13. — Derjenige Werth $= K'$ resp. K'' der Spannung σ' oder Pressung σ'' nach einer gewissen Richtung AB, womit, wenn nach allen zu AB senkrechten Richtungen im betreffenden Punkte die Normalspannungen = Null sind, eine

---

*) Wenn man für rechtwinkelige Coordinatenaxen mit den Werthen von σ als Abscissen und den zugehörigen Werthen von ε als Ordinaten eine Curve zeichnet, so geht dieselbe durch den Anfangspunkt, welcher zudem Inflexionspunkt ist, und zwar so, dass die Curve in ihrem ganzen Verlaufe der Abscissenaxe ihre convexe Seite zukehrt. Bildet die Tangente im Anfangspunkte den Winkel α mit der Abscissenaxe, so ist $E = \lim \frac{\sigma}{\varepsilon} = \cot g\, \alpha$.

**) Weil ε eine unbenannte Zahl ist, so ist E eine Grösse von derselben Art wie σ (Kraft: Fläche).

Zuweilen wird unter dem Elaticitätsmodul eines Materials auch eine Grösse anderer Art verstanden. Wenn man nämlich an einen aus dem betreffenden Materiale verfertigten verticalen prismatischen Stab einen anderen solchen Stab aus demselben Materiale, von demselben Querschnitte und von der Länge l als Belastung anhängt, und wenn dadurch in dem ersteren Stabe (abgesehen von dessen eigenem Gewichte) die (specifische) Ausdehnung ε hervorgerufen wird, so heisst das bis zu einer gewissen Grenze constante Verhältniss $\frac{l}{\varepsilon}$ der Elasticitätsmodul des betreffenden Materials für die Längenrichtung des ersteren Stabes.

Dieser Elasticitätsmodul $L = \frac{l}{\varepsilon}$ ist eine Länge wie l und steht zu dem in der technischen Mechanik gewöhnlich sogenannten Elasticitätsmodul E in der Beziehung: $E = L s$, unter s das specifische Gewicht des Materials (Gewicht: Volumen) verstanden.

Aufhebung des Zusammenhangs der materiellen Punkte durch Zerreissen resp. Zerdrücken verbunden ist, heisst die specifische Zug- oder Druckfestigkeit, auch kurzweg die Zug- oder Druckfestigkeit, absolute oder rückwirkende Festigkeit des Materials für die Richtung AB.

Specifische Schubfestigkeit oder kurzweg Schubfestigkeit, Scheerfestigkeit eines Materials für eine gewisse Ebene F und eine gewisse Richtung AC in derselben heisst der Grenzwerth T der Tangentialspannung τ, welcher eine Aufhebung des Zusammenhangs durch Abschiebung der Ebene F nach der Richtung AC zur Folge hat.

Bei isotropem Material kann kurzweg von seiner Zug- oder Druckfestigkeit K' resp. K'' und von seiner Schubfestigkeit T gesprochen werden.

14. — Die in der folgenden Tabelle enthaltenen Werthe von E, K', K'', T, (ε') und (ε'') für die im Maschinenbau am häufigsten angewendeten Materialien sind abgerundete Mittelwerthe nach Angaben vieler verschiedener Autoritäten. Sie beziehen sich, wie alle Angaben in diesem Buche, wobei eine gegentheilige Bemerkung fehlt, auf das Kilogramm als Krafteinheit und das Quadratcentimeter als Flächeneinheit.*)

Die Angaben für K'' und namentlich (ε'') haben im Allgemeinen geringere Zuverlässigkeit, als diejenigen für K' und (ε'). Die Werthe von T sind fast nur aus Versuchen über die Abdrehung von Stäben abgeleitet, wobei die Schubfestigkeit nicht rein, sondern durch Nebenumstände mehr oder weniger gestört auftritt; sie dürfen deshalb (ausser dem für Schmiedeeisen angegebenen Werthe) nur mit Vorsicht in anderen Fällen gebraucht werden.

Die für Holz gemachten Angaben sind Mittelwerthe für die im mittleren und nördlichen Europa gewöhnlichen Bauhölzer (Nadelhölzer, Eichen, Buchen) und beziehen sich auf die Richtung der natürlichen Fasern, der Werth von T auf den Fall, dass die natürlichen Fasern des der Verdrehung unterworfenen Stabes parallel mit dessen Längenrichtung verlaufen. Rechtwinkelig gegen die Faserrichtung ist K' etwa nur $1/8$, K'' nur $1/2$ so gross, als nach der Richtung der Fasern.

Die Produkte $E(\varepsilon')$ und $E(\varepsilon'')$ können mit einer solchen Annäherung, worauf die folgenden Zahlenwerthe überhaupt Anspruch machen, denjenigen Werthen von σ' resp. σ'' gleich geachtet werden, mit welchen, wenn nach den zu der betreffenden senkrechten Richtungen die Normalspannungen = Null sind, die Elasticitätsgrenze erreicht wird. Man nennt diese Werthe wohl die Tragmodul für Zug resp. Druck.

Bei den aus verschiedenen Bezugsquellen stammenden oder an demselben Orte unter verschiedenen Umständen gewonnenen Materialien einerlei Art weichen alle Constanten oft so bedeutend von den hier angeführten Mittelwerthen ab, dass es bei grösseren, wichtigen und kostspieligen Constructionen rathsam ist, die Eigenschaften des anzuwendenden Materials in Beziehung auf Elasticität und Festigkeit durch besondere Versuche zu prüfen.

*) Wie diese Werthe gefunden wurden oder gefunden werden können, wird in der Folge betreffenden Orts angedeutet.

Die Constante G entzieht sich einer directen und zuverlässigen experimentellen Bestimmung gänzlich; für isotrope Materialien (u. A. Metalle) kann aber aus theilweise theoretischen Gründen $G = {}^3/_8\, E$ bis ${}^2/_5\, E$ gesetzt werden (cf. No. 169).

	E	K'	K''	$\frac{K''}{K'}$	T	(ε')	(ε'')	$\frac{(\varepsilon'')}{(\varepsilon')}$	$E(\varepsilon')$	$\frac{E(\varepsilon')}{K'}$	$E(\varepsilon'')$	$\frac{E(\varepsilon'')}{K''}$
Holz	112000	800	500	$^5/_8$	300	0,0018	0,0015	$^5/_6$	201,6	0,252	168	0,336
Gusseisen ..	1000000	1250	7500	6	2000	0,00075	0,0015	2	750	0,6	1500	0,2
Gussstahl ..	2750000	10000	—	—	7500	0,0022	—	—	6050	0,605	—	—
Schmelz- und Cementstahl	2250000	7500	—	—	5000	0,0012	—	—	2700	0,36	—	—
Schmiedeeisen	2000000	4000	3500	$^7/_8$	3500	0,0007	0,0007	1	1400	0,35	1400	0,4
Eisenblech..	1750000	3500	3000	$^6/_7$	—	0,0008	0,0008	1	1400	0,4	1400	0,466
Eisendraht..	2000000	6500	—	—	—	0,0012	—	—	2400	0,369	—	—
Kupfer, insb. Blech ...	1200000	2500	6000	2,4	—	0,00025	—	—	300	0,12	—	—
Messing ...	650000	1250	11000	8,8	—	0,00075	—	—	487,5	0,39	—	—
Blei	50000	130	520	4	—	0,002	—	—	100	0,769	—	—

15. — Rücksichtlich der Art und Weise, wie die äusseren Kräfte einen Körper angreifen und demnach dessen Elasticität und Festigkeit sich äussern, unterscheidet man verschiedene Fälle, zu deren Charakteristik von einer bestimmten Körperform oder wenigstens einer bestimmten Entstehungsweise der Körperform ausgegangen wird.

Denkt man sich die Körperform entstanden durch Bewegung einer im Allgemeinen dabei stetig veränderlichen ebenen Fläche längs einer beliebigen Curve, so dass die Fläche beständig in ihrem Schwerpunkte rechtwinkelig von der Curve geschnitten wird, so heisse letztere die Mittellinie und jeder zu ihr senkrechte Durchschnitt (den verschiedenen Lagen der erzeugenden Fläche entsprechend) ein Querschnitt des Körpers.

Ein Körper, welcher der Form nach auf solche Weise entstanden gedacht wird, soll ein stabförmiger Körper im weiteren Sinne genannt werden. Ein Querschnitt eines stabförmigen Körpers wird mit F, die Länge seiner Mittellinie gewöhnlich mit l bezeichnet, letztere auch kurzweg die Länge des Körpers genannt. Ein stabförmiger Körper im engeren Sinne ist ein solcher, dessen Mittellinie überwiegend lang, wenigstens länger ist, als die grösste Dimension irgend eines Querschnitts.

Besondere Fälle der Stabform, welche besonders von praktischer Wichtigkeit sind, entsprechen den Voraussetzungen, dass die Mittellinie eine einfach gekrümmte Curve oder gar eine gerade Linie sei, in welchem letzteren Falle sie auch die Axe des Körpers genannt wird; im Falle der einfach gekrümmten Mittellinie ferner der Voraussetzung, dass deren Ebene den Körper in zwei symmetrisch gleiche Hälften theile, im Falle der geraden Mittellinie, dass sich eine Symmetrieebene oder dass sich zwei zu einander senkrechte Symmetrieebenen hindurch legen lassen; endlich der Voraussetzung,

dass der Querschnitt constant sei — abgesehen von den unendlich vielen Specialfällen, welche hinsichtlich der Form einer nicht geraden Mittellinie, des Aenderungsgesetzes eines nicht constanten Querschnitts und der Form sowie der relativen Lage des letzteren gegen die Mittellinie oder die einwirkenden Kräfte möglich sind.

16. — Um die Wirkungen zu untersuchen, welche in einem Querschnitte F eines stabförmigen Körpers durch dessen Belastung hervorgerufen werden, ist es einerlei, ob man das eine oder das andere der beiden durch den Querschnitt F getrennten Stücke des Körpers mit den an ihnen angreifenden äusseren Kräften in Betracht zieht; beide Systeme von Kräften sind mit einander im Gleichgewichte durch Vermittelung der gleichen und entgegengesetzt gerichteten inneren Kräfte in den Flächenelementen von F. Das gerade in Betracht gezogene dieser beiden Systeme von Kräften soll das System der äusseren Kräfte für den Querschnitt F genannt werden. Unter der Richtung s werde die Richtung der Tangente der Mittellinie im Schwerpunkte O des betrachteten Querschnitts F verstanden, dieselbe genommen vom Punkte O aus nach der Seite desjenigen Körperstücks hin, an welchem das betrachtete System der äusseren Kräfte angreift. $O O_1$ sei ein nach der Richtung $-s$ gelegenes unendlich kleines Bogenelement der Mittellinie; F_1 der Querschnitt durch O_1.

Die äusseren Kräfte lassen sich ersetzen durch eine in O angreifende resultirende Kraft R und ein resultirendes Kräftepaar M. Die Resultante R werde in zwei zu einander senkrechte Componenten R_1 und R_2 zerlegt: R_1 senkrecht zu F (positiv oder negativ, jenachdem sie die Richtung s oder die entgegengesetzte Richtung hat), also R_2 in die Ebene F fallend. Ebenso werde das resultirende Paar M in zwei Componentenpaare M_1 und M_2 zerlegt, deren Ebenen sich rechtwinkelig schneiden: die Ebene von M_1 sei parallel mit F (M_1 selbst positiv oder negativ, jenachdem die Axe dieses Paares die Richtung s oder die entgegengesetzte Richtung hat), also die Ebene von M_2 senkrecht zu F.

Die Kraft R_1 verursacht, jenachdem sie positiv oder negativ ist, positive oder negative Normalspannungen in den Flächenelementen von F, welche der Grösse nach so vertheilt sind, dass ihre Resultante durch O geht und $= R_1$ ist. Die entsprechenden positiven oder negativen Ausdehnungen ε haben eine Zunahme oder Abnahme der gegenseitigen Entfernung der materiellen Querschnitte F und F_1 zur Folge.

Das Kräftepaar M_2 verursacht Normalspannungen, welche in den Flächenelementen von F der Grösse nach so vertheilt sind, dass sie sich auf ein Kräftepaar reduciren lassen, dessen Ebene parallel der Ebene von M_2 und dessen Moment $= M_2$ ist. Die entsprechenden positiven und negativen Ausdehnungen haben eine Aenderung der gegenseitigen Neigung von F und F_1 zur Folge.

Die Kraft R_2 verursacht Tangentialspannungen in den Flächenelementen von F, welche der Richtung und Grösse nach so vertheilt sind, dass sie eine

durch O gehende Resultante $= R_2$ haben. Die entsprechenden Verschiebungen γ haben eine gegenseitige Verschiebung der materiellen Querschnitte F und F_1 zur Folge.

Das Kräftepaar M_1 verursacht Tangentialspannungen, welche in den Flächenelementen von F der Richtung und Grösse nach so vertheilt sind, dass sie sich auf ein Kräftepaar in der Ebene F reduciren lassen, dessen Moment $= M_1$ ist. Die entsprechenden Verschiebungen haben eine gegenseitige Verdrehung von F und F_1 zur Folge.

Sollten in den genannten Fällen die materiellen Flächen F und F_1 nach wie vor genaue Ebenen bleiben, so würde dies in jedem Falle ein bestimmtes entsprechendes Gesetz erfordern, nach welchem die Ausdehnungen der Grösse nach, die Verschiebungen der Richtung und Grösse nach von Punkt zu Punkt im Querschnitte sich ändern. Möglicherweise ist aber das Aenderungsgesetz ein anderes und findet dann neben der angeführten Hauptwirkung (Aenderung der Entfernung oder der Neigung, Verschiebung oder Verdrehung von F und F_1) auch noch eine Krümmung der materiellen Querschnitte statt.

Positive oder negative Normalspannungen nach der Richtung s werden nach No. 11 von negativen resp. positiven Ausdehnungen nach jeder Richtung längs F begleitet, welche eine Aenderung der Form und Grösse des Querschnilts F zur Folge haben können; dieselbe ist aber so unbedeutend, dass man im Allgemeinen davon absehen darf.

An denjenigen Stellen der Oberfläche des Körpers, wo die äusseren Kräfte unmittelbar angreifen, können Normalspannungen nach der Richtung der Quere von solcher Grösse vorkommen, dass von ihrer Wirkung nicht ohne wesentlichen Fehler abstrahirt werden darf; bei den zu charakterisirenden einfachen Fällen der Inanspruchnahme eines stabförmigen Körpers wird von ihnen abgesehen.

Streng genommen gehört zu den äusseren Kräften auch der Druck des umgebenden Mediums, also im Allgemeinen der Druck der umgebenden Luft, wodurch eine entsprechende innere Pressung nach jeder, also auch nach der Richtung der Quere hervorgerufen wird. Weil aber die Erfahrungswerthe, mit denen man in der technischen Festigkeitslehre rechnet, auch durch Ver. suche in atmosphärischer Luft als Medium gewonnen und nicht etwa mit Rücksicht auf diesen Umstand einer Correction unterworfen werden, so wird consequenter Weise von dem Luftdrucke als Theil der Belastung eines stabförmigen Körpers im Folgenden stets abstrahirt.*)

17. — Die Aenderungen, welche die Kräfte R_1 und R_2 und die Kräftepaare M_1 und M_2 erfahren, wenn man vom Querschnitte F zum Querschnitte F_1 übergeht, sind zum Theil bedingt durch die an dem Körperelemente zwischen F und F_1 unmittelbar angreifenden äusseren

*) Nur bei plattenförmigen Körpern, die einerseits dem Luftdrucke, andererseits dem Drucke einer anderen Flüssigkeit ausgesetzt sind, kommt jener insofern in Betracht, als nur der Ueberdruck als effectiver Druck von der betreffenden Seite in Rechnung gestellt wird.

Kräfte, zum Theil aber sind sie auch davon unabhängig. Wählt man für den Punkt O als Anfangspunkt die Tangente, die Hauptnormale (d. i. die Normale in der Schmiegungsebene) und die sogenannte Binormale (d. i. die zur Schmiegungsebene senkrechte Normale) der Mittellinie als Axen, nimmt man ferner die erste Axe positiv nach der Richtung s, die zweite nach der Richtung des Krümmungsradius, die dritte nach der Richtung der Axe einer directen Drehung von der ersten zur zweiten positiven Halbaxe, und bezeichnet man dann mit α den Winkel der Kraft R_2, mit β den Winkel der Axe des Paares M_2 mit der zweiten Axe (dem Krümmungsradius), beide Winkel gerechnet von der zweiten gegen die dritte positive Halbaxe hin, so sind die Aenderungen der in Rede stehenden Kräfte und Kräftepaare vollständig bestimmt durch die Aenderungen von

$$R_1,\ R_2 \cos\alpha,\ R_2 \sin\alpha,\ M_1,\ M_2 \cos\beta,\ M_2 \sin\beta.$$

Bezeichnet man nun mit

$$R_1 + dR_1,\ R_2 \cos\alpha + d(R_2 \cos\alpha) \text{ etc.}$$

die analogen Kräfte und Kräftepaare für den Querschnitt F_1, denkt dieselben aber in entgegengesetztem Sinne wirkend, so dass sie als das Resultat der äusseren Kräfte erscheinen, welche den nach der Richtung $-s$ über F_1 hinaus liegenden Körpertheil angreifen, so müssen an der Körperscheibe zwischen F und F_1 alle diese 6 Kräfte und 6 Kräftepaare zusammen mit den etwa unmittelbar zwischen F und F_1 angreifenden äusseren Kräften sich Gleichgewicht halten; wird aber von letzteren abstrahirt, so liefern die allgemeinen 6 Gleichgewichtsbedingungen, bezogen auf die vorgenannten 3 rechtwinkeligen Axen, bei Vernachlässigung unendlich kleiner Glieder der 2ten Ordnung die folgenden Gleichungen, in welchen $d\varphi$ den Neigungswinkel der Querschnitte F und F_1 (den Contingenzwinkel der Mittellinie) und $d\psi$ den Schmiegungswinkel (positiv entsprechend einer Verdrehung der Schmiegungsebene des Punktes O_1 gegen die des Punktes O um die Tangente in demjenigen Sinne, in welchem die Winkel α und β wachsen) bedeutet:

$$\begin{aligned}
dR_1 &= -R_2 \cos\alpha\, d\varphi \\
d(R_2 \cos\alpha) &= R_1\, d\varphi + R_2 \sin\alpha\, d\psi \\
d(R_2 \sin\alpha) &= -R_2 \cos\alpha\, d\psi \\
dM_1 &= -M_2 \cos\beta\, d\varphi \\
d(M_2 \cos\beta) &= M_1\, d\varphi + M_2 \sin\beta\, d\psi - R_2 \sin\alpha\, ds \\
d(M_2 \sin\beta) &= -M_2 \cos\beta\, d\psi + R_2 \cos\alpha\, ds.
\end{aligned}$$

Es sind dies die Aenderungen, welche die in Rede stehenden Kräfte und Kräftepaare von einem zum folgenden Querschnitte erfahren, insoweit sie unabhängig sind von den zwischen diesen beiden Querschnitten unmittelbar angreifenden äusseren Kräften.

Von jenen 6 Relationen sind namentlich die beiden letzten bemerkenswerth; sie liefern, wenn $M_1 = 0$ oder $d\varphi = 0$ ist:

$$\frac{dM_2}{ds} = R_2 \sin(\beta - \alpha)$$

d. h. es ist dann $R_2 \sin(\beta - \alpha)$ das Mass der Schnelligkeit, womit sich das Moment M_2 von einem zum folgenden Querschnitte ändert.

18. — Die unter No. 16 vorgeführte Zusammensetzung und Zerlegung der äusseren Kräfte für einen Querschnitt eines stabförmigen Körpers weist unmittelbar auf die einfachen Fälle hin, welche hinsichtlich der Elasticität und Festigkeit eines solchen Körpers unterschieden werden können: es sind diejenigen, in welchen (mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen) die äusseren Kräfte sich für jeden Querschnitt durch nur eine der beiden Kräfte R_1 und R_2 oder durch nur eines der beiden Kräftepaare M_1 und M_2 ersetzen lassen, oder in welchen wenigstens die übrigen dieser Einzelwirkungen der äusseren Kräfte, ausser einer, ohne wesentlichen Fehler vernachlässigt werden können. Die entsprechenden 4 Specialfälle sind dann folgende:

1) Zug- oder Druck-Elasticität und Festigkeit (absolute oder rückwirkende E. u. F.). Die äusseren Kräfte lassen sich für jeden Querschnitt durch eine Resultante ersetzen, deren Richtungslinie den Querschnitt in seinem Schwerpunkte rechtwinkelig schneidet; wenn diese Resultante ziehend auswärts wirkt, wird der Körper verlängert und event. zerrissen, wenn sie drückend einwärts wirkt, verkürzt und event. zerdrückt.

2) Biegungs-Elasticität und Festigkeit (relative E. u. F.). Die äusseren Kräfte lassen sich für jeden Querschnitt durch ein resultirendes Kräftepaar ersetzen, dessen Ebene den Querschnitt rechtwinkelig schneidet; der Körper wird dadurch verbogen und event. zerbrochen.

3) Schub-Elasticität und Festigkeit (Scheer-E. u. F.). Die äusseren Kräfte lassen sich für jeden Querschnitt durch eine Resultante ersetzen, deren Richtungslinie in den Querschnitt fällt und durch dessen Schwerpunkt geht; der Körper wird verschoben und event. in einem Querschnitte abgeschoben.

4) Drehungs-Elasticität und Festigkeit. Die äusseren Kräfte lassen sich für jeden Querschnitt durch ein resultirendes Kräftepaar ersetzen, dessen Ebene dem Querschnitte parallel ist; der Körper wird um seine Mittellinie verdreht und event. abgedreht.

19. — Alle unter den vorgenannten einfachen nicht enthaltenen Fälle werden als zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit bezeichnet. Sie lassen sich bei stabförmigen Körpern als Verbindungen von zweien oder mehreren jener einfachen Fälle betrachten; doch werden unter derselben Bezeichnung auch solche Fälle begriffen, in welchen die Körperform nicht wohl als Stabform zu bezeichnen, nämlich nicht ungezwungen auf die in No. 15 angegebene Art entstanden zu denken ist, wie z. B. bei plattenförmigen Körpern, Röhren und Gefässen.

Derjenige Fall zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit bei stabförmigen Körpern, welcher als Verbindung von Zug- oder Druck- mit Biegungs-Elasticität und Festigkeit erscheint, ist verhältnissmässig einfach theoretisch zu behandeln, indem es sich dabei nur um die Zusammensetzung von Normalspannungen handelt, die in demselben Punkte nach derselben Richtung auftreten, was einfach durch algebraische Addition geschehen kann; wegen der praktischen Wichtigkeit dieses Falles wird ihm unter der Bezeich-

nung als zusammengesetzte Biegungs-Elasticität und Festigkeit ein besonderes Capitel unmittelbar hinter denjenigen Capiteln gewidmet, welche von jenen beiden ersten einfachen Fällen handeln.

Ebenso würde die Combination des dritten und vierten einfachen Falles, nämlich von Schub- mit Drehungs-Elasticität und Festigkeit, einfach auf die Zusammensetzung von Tangentialspannungen hinauslaufen, die in demselben Punkte derselben Ebene nach verschiedenen Richtungen auftreten, was nach dem Parallelogramm der Kräfte geschehen könnte; zur besonderen Hervorhebung dieses Falles, etwa als zusammengesetzte Drehungs-Elasticität und Festigkeit, liegt indessen eine praktische Veranlassung nicht vor.

Alle übrigen Fälle der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit erfordern zu ihrer theoretischen Behandlung eine erweiterte Grundlage in Betreff der allgemeinen Beziehungen zwischen den Normal- und Tangentialspannungen, Ausdehnungen und Verschiebungen, welche in demselben Punkte eines belasteten Körpers nach verschiedenen Richtungen, resp. in verschiedenen Ebenen und nach verschiedenen Richtungen stattfinden; diese Beziehungen werden deshalb im sechsten Capitel vorausgeschickt, insoweit für die im siebenten Capitel abgehandelte allgemeinere Theorie der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit ihre Kenntniss nöthig ist.

20. — Bei der Zug- oder Druck-, der einfachen und zusammengesetzten Biegungs-Elasticität und Festigkeit darf nach No. 11, sofern die Normalspannungen nach den zur Mittellinie senkrechten Richtungen nicht in Betracht kommen, die den betreffenden Aufgaben nach No. 5 zu Grunde liegende Forderung dahin ausgesprochen werden, dass in irgend einem Punkte des Körpers die Spannung σ' oder Pressung σ'' nach der Richtung der Mittellinie höchstens = einem gewissen erfahrungsmässig zulässigen Werthe sein solle, welcher in der Folge mit k' resp. k'' bezeichnet wird oder auch einfach mit k, falls $k' = k''$ gesetzt wird oder eine Unterscheidung der vorkommenden Spannungen in Beziehung auf ihren Charakter als Spannungen im engeren Sinne oder Pressungen der Natur der betreffenden Aufgabe gemäss nicht nöthig ist oder wenigstens unterlassen wird. Diese zulässigen Maximalwerthe k', k'' oder k sind für alle Punkte dieselben, sofern, wie im Folgenden stets vorausgesetzt wird, das Material des Körpers entweder isotrop ist oder homogen mit einer ausgezeichneten Elasticitätsaxe, welche überall die Richtung der Mittellinie hat.

Bei der Schub- und der Drehungs-Elasticität und Festigkeit kommen als Spannungen nur die Tangentialspannungen in den verschiedenen Punkten der Querschnitte in Betracht, die zu den betreffenden Verschiebungen nach No. 12 in bestimmter Beziehung stehen; die Fundamentalforderung wird deshalb hier dadurch erfüllt, dass man diese Tangentialspannungen τ höchstens einen gewissen erfahrungsmässig zulässigen Werth annehmen lässt, der in der Folge mit t bezeichnet wird, und welcher bei isotropem oder bei homogenem Materiale mit ausgezeichneter Elasticitätsaxe

nach der Richtung der Mittellinie für alle Punkte und alle Schubrichtungen der betreffenden Querschnitte in denselben gleich ist.

Bei der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit im Allgemeinen ist es wesentlich, daran festzuhalten, dass principiell nicht sowohl σ', σ'' und τ, sondern die Ausdehnungen und Zusammenziehungen ε' und ε'' gewisse Werthe nicht überschreiten sollen; weil aber einmal die oben mit k' und k'' bezeichneten Werthe in der praktischen Festigkeitslehre sich eingebürgert haben, so möge die den Aufgaben der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit im Allgemeinen zu Grunde zu legende Forderung auch dahin ausgesprochen werden, dass das Produkt $E\varepsilon'$ resp. $E\varepsilon''$ in irgend einem Punkte und nach irgend einer Richtung höchstens den erfahrungsmässig zulässigen Werth k' resp. k'' annehmen darf, der bei nicht isotropem Materiale für verschiedene Richtungen verschieden ist.

21. — Die passende Wahl der Werthe k' und k'' für die verschiedenen Constructionsmaterialien ist zugleich von den Werthen $E(\varepsilon')$ resp. $E(\varepsilon'')$ und K' resp. K'' der Tabelle in No. 14 abhängig: je kleiner die Verhältnisse $\frac{E(\varepsilon')}{K'}$ und $\frac{E(\varepsilon'')}{K''}$ sind, je weiter also ein bis zur Elasticitätsgrenze belasteter Körper noch von dem Zustande entfernt ist, bei welchem der Zusammenhang der materiellen Punkte aufgehoben wird, einem desto grösseren aliquoten Theile von $E(\varepsilon')$ resp. $E(\varepsilon'')$, dagegen einem desto kleineren aliquoten Theile von K' resp. K'' muss man k' resp. k'' unter sonst gleichen Umständen gleich setzen.

Eine feste Regel lässt sich darüber nicht aufstellen, weil noch mancherlei praktische Rücksichten obwalten, z. B. die Formänderung, welche auch abgesehen von der Festigkeit unter Umständen eine gewisse Grösse nicht überschreiten soll, die von der ganzen Construction den Umständen gemäss überhaupt beanspruchte Dauerhaftigkeit, die Widerstandsfähigkeit des Materials gegen atmosphärische Einflüsse, die Abnutzung, welcher ein Maschinentheil durch Reibung unterworfen sein kann, die verschiedene Leichtigkeit und Billigkeit der Ersetzung eines schadhaft gewordenen Constructionstheiles durch einen anderen, der verschiedene Grad, in welchem auf der Festigkeit verschiedener Constructionselemente diejenige der ganzen Construction beruht, die grössere oder geringere Gefahr, welche mit einem etwa eintretenden Bruche für den regelmässigen Betrieb oder gar für Menschenleben verbunden sein würde, ferner Stösse und Einwirkungen lebendiger Kräfte bewegter Massen, die bei verschiedenartigen Maschinen in sehr verschiedenem Grade vorkommen,*) sowie andere Umstände, welche sich der theoretischen Berücksichtigung entziehen.**)

*) Unter Umständen sind diese Einwirkungen so bedeutend, dass es angemessen ist, die Dimensionen der betreffenden Maschinentheile vorwiegend davon abhängig zu machen. Die Mittel dazu giebt das letzte Capitel an die Hand, welches für gewisse Fälle die Arbeit berechnen lehrt, die ein fester Körper durch seine Formänderung ohne Gefahr in sich aufnehmen kann.

**) Hierher gehört u. A. auch die Erfahrung, dass das Schmiedeeisen (vermuthlich

Im Allgemeinen können deshalb nur sehr weite Grenzen für k' und k'' angegeben werden, innerhalb welcher in jedem Falle nach praktischer Erfahrung oder nach Analogie verwandter Fälle die Wahl zu treffen ist, und zwar etwa $^3/_4$ bis $^1/_4$ von $E(\varepsilon')$ resp. $E(\varepsilon'')$, oder $^1/_4$ bis $^1/_{20}$ von K' resp. K''.

Was die passende Wahl des Werthes t betrifft, so muss es zwar, da die Verschiebungen auf positive und negative Ausdehnungen zurückgeführt werden können, einen gewissen der Elasticitätsgrenze entsprechenden Werth (γ) der Verschiebung geben, der von den Grenzwerthen (ε') und (ε'') für die verschiedenen Richtungen abhängt, und wäre deshalb analog dem oben Angeführten jener Werth t zugleich von $G(\gamma)$ und von T abhängig zu machen; indessen genügt es bei der Schub- und der Torsions-Elasticität und Festigkeit, wo dieser Werth t überhaupt nur in Betracht kommt, ihn einfach einem den Umständen gemäss grösseren oder kleineren aliquoten Theile von T gleich zu setzen, etwa innerhalb der Grenzen $^1/_4$ und $^1/_{20}$ T.

---

in Folge einer gewissen Structurveränderung) an Festigkeit verliert, wenn es anhaltenden heftigen Erschütterungen ausgesetzt ist.

ERSTES CAPITEL.

Zug- oder Druck-Elasticität und Festigkeit.

22. — Die Länge des stabförmigen Körpers sei $= l$, ein Querschnitt $= F$, die Resultante der äusseren Kräfte für diesen Querschnitt $= P$; die Richtungslinie der letzteren schneidet den Querschnitt rechtwinkelig in seinem Schwerpunkte O und berührt also in diesem Punkte die Mittellinie des Stabes. Im Allgemeinen kann die Mittellinie eine beliebige Curve und können F und P von einem zum anderen Punkte O derselben veränderlich sein.

Die Normalspannungen sind in den Flächenelementen von F so vertheilt, dass sie eine durch O gehende Resultante $= P$ haben, welchem Umstande am einfachsten durch die Annahme entsprochen wird, dass σ im Querschnitte constant sei, mithin auch ε; die materiellen Querschnitte des Stabes bleiben dann auch bei der Belastung genaue Ebenen, und es erfahren je zwei derselben, welche den Endpunkten eines Bogenelementes OO_1 der Mittellinie entsprechen, nur eine solche Aenderung ihrer relativen Lage, welche als eine Folge ihrer Drehung um die betreffende Krümmungsaxe der Mittellinie betrachtet werden kann.*)

Unter dieser Voraussetzung ist

$$max. \left(\frac{P}{F}\right) = k$$

die Bedingungsgleichung für die höchstens zulässige Belastung bei gegebenen Querschnitten oder für die erforderlichen Querschnitte bei gegebener Belastung; die Längenänderung des Stabes ist:

$$\Delta l = \frac{1}{E}\int_0^l \frac{P\,dl}{F}.$$

*) Streng genommen kann an den Stellen, wo die äusseren Kräfte unmittelbar angreifen, eine Krümmung der ursprünglich ebenen materiellen Querschnitte eintreten, die dann, allmälig schwächer werdend, auf die benachbarten Querschnitte sich überträgt; diese und ähnliche Unvollkommenheiten der den Rechnungen zu Grunde gelegten Annahmen lassen sich, ohne zu unpraktisch subtilen Untersuchungen zu schreiten, nur durch die in der Wahl des Werthes k liegende Sicherheit unschädlich machen.

A. Stabförmiger Körper von constantem Querschnitte.

23. — Ist ausser F auch P constant, so ist die Bedingungsgleichung für P oder F:

$$P = kF$$

und die Längenänderung des Stabes:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}.$$

Dieser Fall liegt insbesondere dann vor, wenn der Stab gerade ist und nur eine einzige äussere Kraft P ihn am Ende nach der Richtung der Axe angreift, während die Wirkung des eigenen Gewichts G des Stabes vernachlässigt wird.

Letzteres darf in den meisten Fällen geschehen. Befindet sich aber der gerade Stab bei grosser Länge in verticaler Lage, so kann es nöthig sein, die eigene Schwere als äussere Kraft mit zu berücksichtigen; wird dann der vertical hängende Stab unten durch die ziehende oder der vertical stehende Stab oben durch die drückende Kraft P angegriffen, die also in beiden Fällen vertical abwärts gerichtet ist, so nimmt in beiden Fällen die Resultante der äusseren Kräfte von dem unmittelbar angegriffenen nach dem anderen Stabende hin von P bis $P+G$ zu, und es sind die obigen Gleichungen zu ersetzen durch:

$$P + G = kF; \quad \Delta l = \frac{(P + \frac{1}{2}G)l}{EF}.$$

Bei entgegengesetzter Richtung von P würde hierin G oder P (je nach der relativen Grösse beider Kräfte) entgegengesetzt zu nehmen sein.

I. Zug-Elasticität und Festigkeit.

24. — Gerade Stäbe von constantem Querschnitte sind vorzugsweise geeignet und angewendet worden zur experimentellen Bestimmung der Constanten K', (ε') und E eines gegebenen Materials.

Zur Bestimmung der absoluten Festigkeit K' brauchen die Stäbe nicht lang zu sein, und es ist hauptsächlich Sorge zu tragen, dass die Richtungslinien der belastenden Kraft am einen und der Widerstandskraft am anderen Ende genau mit der Axe des Stabes zusammenfallen; auch sind diese Enden so zu verstärken, dass der Riss an einer solchen mittleren Stelle erfolgen muss, wo eine gleichförmige Vertheilung der Spannung im Querschnitte mit Sicherheit vorausgesetzt werden darf. (Cf. No. 22, Anmerkung.) Ist dann P die totale Spannung im Augenblicke des Reissens und F die ursprüngliche Grösse des Querschnitts, so ist $K' = \frac{P}{F}$. An der Stelle, wo der Riss erfolgt, findet zuweilen eine beträchtliche Zusammenziehung des Querschnitts statt, und ist deshalb die specifische Spannung im Augenblicke des Reissens eigentlich entsprechend grösser als $\frac{P}{F}$; indessen

ist es üblich, diese auf den ursprünglichen Querschnitt bezogene specifische Spannung $= K'$ zu setzen.

Bei der Bestimmung von (ε') und $E = \frac{P}{\varepsilon F}$ müssen die Stäbe möglichst lang genommen werden, damit ein gewisser Fehler bei der Ablesung von Δl einen möglichst kleinen Fehler von $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ verursache. Es eignen sich deshalb zu diesem Zwecke besonders Drähte, mit welchen auch dergleichen Versuche im ausgedehntesten Masse von Gerstner, Lagerhjelm, Brix, Wertheim u. A. angestellt wurden.

25. — Das Verhalten beim Zerreissen von Stäben aus verschiedenem Material ist wesentlich verschieden.

Kurzfaserige Hölzer (Eichen, Buchen), Gusseisen und überhaupt alle Gussmetalle, auch Gussstahl, zeigen bis zum Augenblicke des Reissens keine andere wesentliche Veränderung, als die auf die ganze Länge des Stabes gleichmässig vertheilte, stetig zunehmende Ausdehnung; der Riss erfolgt plötzlich, ohne dass durch eine auffallende Erscheinung seine Nähe sich ankündigte.

Langfaserige Hölzer (insbesondere Nadelhölzer) zeigen für das Auge zwar auch keine andere wesentliche Veränderung, als die allgemeine Ausdehnung, allein der bevorstehende Riss kündigt sich dem Ohre durch das immer häufiger werdende klingende Abreissen einzelner Fasern an.

Schmiedeeisen und überhaupt alle streckbaren Metalle, insbesondere auch Kupfer und in geringerem Grade Schmiedestahl, zeigen, wenn die Spannung eine gewisse Grösse erreicht hat, auch bei ursprünglich überall möglichst gleichem Querschnitte, neben der allgemeinen Ausdehnung noch eine auffallende Zusammenziehung des Querschnitts an irgend einer Stelle des Stabes, welche mehr und mehr zunimmt bis sie ebendaselbst den Riss veranlasst.

26. — Der in der Tabelle unter No. 14 angegebene Mittelwerth der Zugfestigkeit des Holzes nach der Richtung der Fasern ($K' = 800$) bezieht sich vorzugsweise auf Tannen- und Buchenholz; Eschenholz hat im Durchschnitt eine grössere, Eichenholz eine kleinere Zugfestigkeit. Dagegen ist dieselbe nach der Richtung senkrecht gegen die Fasern bei Eichenholz und allen harten Hölzern verhältnissmässig grösser, etwa $^1/_4$ derjenigen nach der Faserrichtung, bei weichen Hölzern aber oft kleiner als $^1/_5$ von jener.

Im Durchschnitt aus verschiedenen Versuchen hat sich ergeben, dass die Zugfestigkeit des Eisenblechs senkrecht gegen die Walzrichtung etwa nur 0,9 von derjenigen nach der Walzrichtung beträgt; bei Blechen aus Holzkohlen-Roheisen ist der Unterschied beider Festigkeiten kleiner, bei Blechen aus Coks-Roheisen grösser. Die Angabe $K' = 3500$ in No. 14 kann als Mittelwerth für die Walzrichtung gelten.

Aus Versuchen, welche von W. Fairbairn in England und schon früher von einer Commission des Franklin-Instituts in Philadelphia über den

Einfluss der Temperatur auf die Zugfestigkeit des Schmiedeeisens angestellt wurden, ist zu schliessen, dass dieselbe mit wachsender Temperatur Anfangs nicht nur nicht abnimmt, sondern sogar bis zu einem bei ungefähr 200° C. liegenden Maximum zunimmt, welches bis 20% grösser sein kann, als der ursprüngliche Werth bei gewöhnlicher Luft-Temperatur; bei weiter gesteigerter Hitze nimmt dann aber die Festigkeit schnell ab, so dass sie bei der dunklen Rothglühhitze (600—700° C.) nur noch ½—⅓ des gewöhnlichen Werthes beträgt.*)

Die Zugfestigkeit des Kupferblechs nimmt mit wachsender Temperatur beständig ab und beträgt bei 400° C. nur noch etwa ½ derjenigen bei 0°.

27. — Durch Hämmern, Walzen und anderweitige, mit starkem Drucke auf die Oberfläche verbundene Bearbeitung erfahren die streckbaren Metalle besonders in den Oberflächenschichten eine Verdichtung und überhaupt eine gewisse vortheilhafte, die Festigkeit erhöhende Texturveränderung. Diese Wirkung ist am auffallendsten beim Ziehen der Drähte; die sonst im Allgemeinen dem Querschnitte proportional zu setzende totale Festigkeit erfährt dadurch einen dem Umfange proportionalen Zuwachs, so dass, unter d den Durchmesser des Drahts verstanden, die totale Festigkeit

$$= \alpha d^2 + \beta d,$$

mithin die specifische Festigkeit:

$$K' = \frac{4}{\pi}\left(\alpha + \frac{\beta}{d}\right)$$

gesetzt werden kann. Durch das Ausglühen nimmt die Festigkeit ab, indem die Verdichtung grossentheils wieder verschwindet. Werden für diesen Fall die Coefficienten α und β insbesondere mit α_1 und β_1 bezeichnet, so gelten nach Versuchen von Karmarsch, die freilich nur mit Drähten von verhältnissmässig geringer Dicke angestellt wurden, die folgenden Werthe, vorausgesetzt dass d in Millimetern, die Festigkeit in Pfunden (à ½ Kilogr.) ausgedrückt wird:

	nicht geglüht		geglüht	
	α	β	α_1	β_1
Stahldraht	100	42	90	6
Eisendraht, bester . . .	100	25	52	6
„ gewöhnlicher	72	36	45	10
Messingdraht	86	16	45	11
Kupferdraht	55	15	37	0
Platindraht	35	19	29	15
Zinkdraht	20	3,5	—	—
Draht von hartem Blei	3,5	0	—	—
„ „ weichem „	2,7	0	—	—

*) Diese Erfahrungen lehren, dass die Widerstandsfähigkeit eines Dampfkessels erst dann, in diesem Falle aber sehr wesentlich gefährdet wird, wenn das Blech da, wo es mit dem Feuer oder den heissen Gasen in Berührung ist, von Wasser entblösst und dadurch sehr heiss oder gar glühend wird.

Durch das Ausglühen vermindert sich im Allgemeinen die Festigkeit verhältnissmässig um so mehr, je dünner der Draht ist, sofern nämlich im Allgemeinen $\frac{\beta_1}{\alpha_1} < \frac{\beta}{\alpha}$ ist; nach der Tabelle macht nur der Messingdraht eine Ausnahme.

28. — Die Angabe $K' = 6500$ Kilogr. pro Quadratcentimeter für Eisendraht (in der Tabelle unter No. 14) bezieht sich auf ungeglühten Draht und entspricht besonders den sorgfältigen Versuchen von Brix, angestellt mit Drähten von 1⅓ bis 1½ Linien oder ungefähr 3 Millimeter Durchmesser; sie würde mit den Zahlen von Karmarsch übereinstimmen

bei Voraussetzung besten Drahts für $d = 12$ Millim.,
" " gewöhnlichen " " $d = 1{,}2$ "

Durch das Ausglühen nimmt die Zugfestigkeit des Eisendrahts nach Brix auf ungefähr ⅔ des früheren Werthes ab. Der Elasticitätsmodul E erfährt dadurch keine wesentliche Aenderung. Am auffallendsten ist aber der Unterschied der Ausdehnungen ε im Augenblicke des Reissens: bei ungeglühtem Drahte ist diese $= 0{,}0034$, bei geglühtem dagegen $= 0{,}0885$.

29. — Hanfseile und Drahtseile.

Die specifische Festigkeit eines Hanfseils ist je nach der Güte des Hanfs, der Anfertigungsart des Seils und der Dauer seines Gebrauchs verschieden, etwa $= 500$ bis 800 Kilogr., sofern es sich noch in gutem Zustande befindet. Sein erforderlicher Durchmesser d bei gegebener Zugkraft P ist:

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi k}} = 1{,}128 \sqrt{\frac{P}{k}};$$

im Durchschnitt $d = \frac{1}{9}\sqrt{P}$ entsprechend $k = 103$.

Besteht ein Drahtseil aus n Drähten, so ist jedem einzelnen Drahte der Durchmesser

$$\delta = \sqrt{\frac{4P}{\pi k n}} = 1{,}128 \sqrt{\frac{P}{kn}}$$

zu geben. Ein rundes Drahtseil besteht häufig aus 36 Drähten, nämlich 6 Litzen von je 6 Drähten, und sind dann im Querschnitte des Seils die Querschnitte der einzelnen Drähte innerhalb 6 regelmässiger und in Seiten sich berührender Sechsecke (den einzelnen Litzen entsprechend) um ein 7tes Sechseck herum (einer inneren sogenannten Hanfseele entsprechend) so gruppirt, dass man den Durchmesser d des ganzen Seils nahezu setzen kann:

$$d = 9\delta \,.\, \cos 30^0;$$

wird hiernach für ein rundes Seil allgemein

$$d = \frac{3}{2} \cos 30^0 \,.\, \delta \sqrt{n}$$

gesetzt, d. h. auch bei verschiedener Zahl und Gruppirung der Drähte d^2 proportional $n\delta^2$ angenommen, so ist allgemein

$$d = \sqrt{\frac{27P}{4\pi k}} = 1{,}466 \sqrt{\frac{P}{k}},$$

wofür im Durchschnitt zu setzen ist:

$$d = \frac{1}{20}\sqrt{P} \text{ entsprechend } k = 859.$$



30. — Ein auf gewöhnliche Art von Stangen getragener Telegraphendraht hat eine Spannung, welche abhängt vom Gewichte des Drahts $= p$ pro Längeneinheit, von der Entfernung $= 2a$ zweier Stangen und von der Höhe h des Bogens, in welchem der Draht zwischen den Stangen niederhängt. Dieser flache Bogen kann für einen Parabelbogen gelten mit derselben Näherung, mit welcher p auch als das Gewicht pro Längeneinheit der Horizontalprojection betrachtet werden darf. Ist die Spannung des Drahts im Scheitel $= P$ gegeben, so muss

$$h = \frac{pa^2}{2P}$$

sein; nach den Stangen hin nimmt dann die Spannung nur sehr wenig, bis $\sqrt{P^2 + (pa)^2}$ zu.

Bei Erniedrigung der Temperatur nimmt die

$$= 2a\left(1 + \frac{2}{3}\frac{h^2}{a^2}\right)$$

zu setzende Länge des Drahts, somit auch h ab und P zu; soll nun die Spannung im Scheitelquerschnitte erst bei einer solchen Temperatur $= P$ werden, welche um t^0 niedriger ist, als diejenige, bei welcher der Draht gelegt wird, so darf er beim Legen nur so stark angezogen werden, dass die Bogenhöhe

$$h_1 = \sqrt{h^2 + 1{,}5\,\alpha t a^2} = a\sqrt{\left(\frac{pa}{2P}\right)^2 + 1{,}5\,\alpha t}$$

ist, unter α den Ausdehnungscoefficienten des Drahts verstanden.

II. Druck-Elasticität und Festigkeit.

31. — Zu Versuchen über die Druckfestigkeit K'' verschiedener Materialien eignen sich vorzugsweise gerade stabförmige Körper von constantem (kreisförmigem oder quadratischem) Querschnitte F und geringer Länge. Um bei so kleiner Länge mit Sicherheit

$$K'' = \frac{P}{F}$$

setzen zu dürfen, unter P den die Zerstörung bewirkenden Druck verstanden, ist es nöthig, dass nicht nur die Richtungslinien des resultirenden directen Druckes an der einen Endfläche und des entsprechenden Widerstandes der Unterlage an der anderen genau in die Axe des Körpers fallen, sondern es ist ausserdem durch entsprechende Zwischenlagen dafür zu sorgen, dass beide Pressungen möglichst gleichförmig in den Endflächen vertheilt seien.

Bei solchen Versuchen wurden gewöhnlich die Materialien in Form von Würfeln angewendet; Rondelet u. A. hielten bei dieser Form die Druckfestigkeit für am grössten, besonders bei Steinen. Jedoch hat Hodgkinson durch spätere Versuche mit Prismen von Stein, Holz, Schmiedeeisen und namentlich Gusseisen gezeigt, dass die Festigkeit mit zunehmender Höhe der Prismen von der kleinstmöglichen Höhe an durchweg abnimmt, so lange letztere nicht grösser ist, als die 3fache Dicke,*) und dass sie dann nahe

*) Die Dicke eines stabförmigen Körpers an einer gewissen Stelle ist seine kleinste Querdimension daselbst, d. h. der kleinste Abstand zweier paralleler Geraden in der Ebene des Querschnitts, welche dessen Umfang, ihn zwischen sich fassend, berühren.

constant bleibt, bis die Höhe das 6fache der Dicke beträgt. Damit hängt es auch zusammen, dass der Widerstand eines massiven prismatischen Körpers gegen Zerdrücken bei gleicher Länge und gleichem Inhalte des Querschnitts nicht ganz von dessen Form unabhängig, sondern um so grösser, je kleiner der Umfang, am grössten also für die Kreisform des Querschnitts ist.

Compressionsversuche zur Bestimmung von (ε'') und E sind schwieriger anzustellen und seltener angestellt worden, als Ausdehnungsversuche zur Bestimmung von (ε') und E. Es sind dazu lange Stäbe nöthig, deren Biegung, wenn sie frei ständen, den Versuch stören würde; um solche Biegung zu hindern, ist der Versuchsstab in eine starke röhrenförmige Leitung zu stellen, welche so dicht anschliesst, dass es nur eben möglich ist, durch ein passendes Schmiermittel die Reibung unschädlich zu machen.

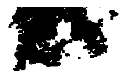
32. — Auch das Verhalten beim Zerdrücken ist bei verschiedenen Materialien wesentlich verschieden; während einige, wie namentlich weiche Metalle, u. A. selbst sehr weiches Schmiedeeisen, sich blos zusammendrücken lassen ohne dabei in Stücke zu zerfallen, werden andere, wie Gusseisen, Hölzer, Steine, gänzlich zertrümmert, zeigen aber gewöhnlich schon lange vorher Sprünge und Risse.

Daraus, dass verschiedene Experimentatoren verschiedene Kennzeichen als bestimmend erachteten, um die Festigkeit für überwunden ansehen zu dürfen, sind zum Theil die sehr abweichenden Angaben über die Werthe von K'' zu erklären, welche aus demselben Grunde ohne genaue Angabe der näheren Umstände kaum einen wissenschaftlichen Werth haben. So beziehen sich z. B. in der Tabelle unter No. 14 die für Messing und Blei angegebenen Werthe auf eine Zusammendrückung bis $^1/_2$, der Werth für Kupfer auf eine solche bis etwa $^7/_8$ der ursprünglichen Höhe.

Spröde Körper, namentlich Steine, zerfallen vorwiegend in pyramidale Stücke, deren Spitzen im Innern des Körpers zusammen liegen und von denen diejenigen besonders deutlich ausgebildet zu sein pflegen, deren Grundflächen die gedrückten Endflächen des Körpers sind. Die ersten Sprünge zeigen sich (nach Brix) bei Steinen gewöhnlich schon bei einem nur halb so grossen Drucke, als bei welchem sie in Trümmer zerfallen.

Bei Hölzern, besonders langfaserigen Hölzern, die nach der Richtung der Fasern gedrückt werden, kündigt sich die Nähe der Zerstörung durch eine wulstförmige Erhöhung an, welche, dem Umfange eines Querschnitts folgend, an irgend einer Stelle hervortritt.

33. — Die Druckfestigkeit der meisten natürlichen Steine, selbst im Uebrigen ganz ähnlicher Varietäten, ist zwar je nach ihrem Fundorte, diejenige der Ziegelsteine und des erhärteten Mörtels je nach dem verwendeten Materiale und der Darstellungsweise so sehr verschieden, dass brauchbare Mittelwerthe sich kaum angeben lassen; als ungefährer Anhalt und vorbehaltlich specieller Versuche und örtlicher Erfahrungen mögen indessen folgende Zahlen dienen:



Basalt	K'' =	1200
Gneiss und Granit	„ =	600
Kalkstein	„ =	300
Sandstein	„ =	200
Gewöhnlicher Ziegelstein	„ =	60
Guter Mörtel von Kalk und Sand .	„ =	40.

Natürliche Steine, welche ein geschichtetes Gefüge haben, leisten einen grösseren Widerstand, wenn der Druck senkrecht gegen die Schichten stattfindet, als nach einer anderen Richtung. Die Festigkeit des Mörtels nimmt, selbst wenn er schon Jahre alt ist, noch merklich mit der Zeit zu.

Bei Steinen, wie bei allen harten, mehr oder weniger spröden Körpern, ist es wesentlich, den Druck recht gleichförmig in der Druckfläche zu vertheilen, um die Druckfestigkeit zur vollen Geltung zu bringen; es dienen dazu Zwischenlagen von weicherem Material, und ist es bei Mauerwerk der Mörtel, welcher neben seiner Bestimmung als Bindemittel auch diesen Dienst leistet.

34. — Die zulässige Belastung eines auf Druckfestigkeit in Anspruch genommenen Körpers ist häufig nicht sowohl durch die Druckfestigkeit dieses Körpers, als vielmehr durch ganz andere Umstände bedingt, z. B. die Belastung eines eingerammten Pfahls durch die Widerstandsfähigkeit des Erdreichs gegen das weitere Eindringen. Ein Beispiel aus dem Maschinenbaufache sind die Zapfen stehender Wellen, welche bei gegebenem Drucke P einen viel grösseren Durchmesser d erhalten, als mit Rücksicht auf die Festigkeit des Materials des Zapfens (gewöhnlich Stahl) und der Pfanne (Rothguss oder eine andere harte Metallcomposition) nöthig wäre. Massgebend ist hierbei in höherem Grade die Rücksicht auf möglichst geringe Erwärmung und Abnutzung, welche Wirkung der Reibung mit dem specifischen Drucke und der Geschwindigkeit der gleitenden Bewegung wächst, so dass jener specifische Druck um so kleiner sein muss, je grösser diese Geschwindigkeit ist. Wird diesen Verhältnissen entsprechend mit Redtenbacher von der empirischen Formel

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{1}{a + bnd}$$

ausgegangen, unter n die Umdrehungszahl pro Minute verstanden, so ergiebt sich

$$d = \alpha n P \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\beta}{n^2 P}}\right),$$

unter α und β Constante verstanden, welche durch a und b bestimmt sind, nämlich:

$$\alpha = \frac{2b}{\pi}; \ \beta = \frac{\pi a}{b^2}.$$

Setzt man

$$a = \frac{\pi}{400} \text{ und } b = 0{,}000007\pi,$$

entsprechend einem specifischen Drucke = 127 Kilogr. für $n = 0$, dagegen nur = 20 Kilogr. für schwere Wellen mit $d = 16$ Centim. bei $n = 120$ (nach Redtenbacher), so ist

$$\alpha = 0{,}000014; \ \beta = 51020000.$$

Für sehr langsam gehende und nicht sehr stark belastete Wellen ist näherungsweise zu setzen:

$$d = \alpha\sqrt{\beta} \, . \, \sqrt{P} = 0{,}1\sqrt{P}.$$

B. Stabförmiger Körper von veränderlichem Querschnitte.

35. — Einem stabförmigen Körper an verschiedenen Stellen einen verschiedenen Querschnitt zu geben kann man hauptsächlich veranlasst sein in der Absicht, einen sogenannten Körper von gleichem Widerstande herzustellen, d. h. einen Körper, dessen Festigkeit bei gegebener Art der Belastung in allen Querschnitten gleich stark in Anspruch genommen wird; die Aufgabe besteht dann darin, das diesem Zwecke entsprechende Gesetz der Veränderlichkeit des Querschnitts zu ermitteln.

Bei der Zug- oder Druckfestigkeit kann diese Aufgabe sich darbieten, wenn ein stabförmiger Körper mit gerader Mittellinie vertical hängend unten oder vertical stehend oben durch eine nach der geraden Mittellinie oder Axe abwärts gerichtete äussere Kraft P angegriffen wird und der Körper so lang ist, dass sein eigenes Gewicht eine mit P vergleichbare oder gar überwiegende Grösse hat. Ist dann

F der Querschnitt im Abstande x von dem durch die Kraft P angegriffenen Ende des Körpers,

s das specifische Gewicht des letzteren und

e die Basis der natürlichen Logarithmen,

so wird der Forderung, dass in allen Punkten aller Querschnitte die Spannung oder Pressung $= k$ sei, durch die für alle Werthe von x gültige Gleichung:

$$F = \frac{P}{k} e^{\frac{sx}{k}}$$

entsprochen. Es müsste darin $-s$ statt s gesetzt werden, wenn P vertical aufwärts gerichtet wäre.

36. — Die Gleichung der vorigen No. könnte zur Formgebung langer Schachtgestänge Anwendung finden, wenn nicht die stetige Veränderlichkeit des Querschnitts hierbei praktisch unausführbar wäre. Näherungsweise lässt sich aber der Zweck erreichen, indem man das Gestänge aus verschiedenen Stücken, von unten an gerechnet etwa mit den Längen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ zusammensetzt und deren Querschnitte $F_1\ F_2\ F_3 \ldots$, für jedes einzelne Stück constant, so wählt, dass in den obersten Querschnitten aller Stücke die specifische Spannung $= k$ ist. Dieser Forderun entsprechen die Querschnitte:

$$F_1 = \frac{P}{k - s l_1}$$

$$F_2 = \frac{Pk}{(k - s l_1)(k - s l_2)}$$

$$F_3 = \frac{Pk^2}{(k - s l_1)(k - s l_2)(k - s l_3)} \quad \text{etc.}$$

Insbesondere mit $l_1 = l_2 = l_3 \ldots = l$ wird:

$$F_n = \frac{P}{k}\left(\frac{k}{k - s l}\right)^n.$$

ZWEITES CAPITEL.

Biegungs-Elasticität und Festigkeit.

---

27. — Nach der Definition in Nr. 18 wird hierunter derjenige Fall verstanden, in welchem die äusseren Kräfte sich für jeden Querschnitt durch ein resultirendes Kräftepaar ersetzen lassen, dessen Ebene den Querschnitt rechtwinkelig schneidet und dessen Moment hier mit M bezeichnet werden soll. Freilich ist dieses Kräftepaar im Allgemeinen unvermeidlich von einer Kraft R begleitet, deren Richtungslinie in die Ebene des Querschnitts fällt,*) von deren Wirkung aber in diesem Capitel abstrahirt wird. Der dadurch begangene Fehler ist um so kleiner, je grösser die Länge l des stabförmigen Körpers im Vergleich mit seiner grössten Höhe h ist, auch kleiner für solche Querschnitte, welche eine constante Breite oder gar ihre grösste Breite in der Mitte haben, als für solche, welche von der Mitte nach Aussen hin an Breite zunehmen.

Unter der Höhe eines Querschnitts oder der Höhe des Stabes an der Stelle eines gewissen Querschnitts wird hier und in diesem Capitel überhaupt die grösste mit der Ebene des Paares M parallel gemessene Dimension des betreffenden Querschnitts verstanden, d. h. die Entfernung derjenigen beiden zur Ebene von M senkrechten Geraden, welche den Umfang des Querschnitts so berühren, dass sie ihn ganz zwischen sich fassen. Jede andere zur Ebene von M senkrechte Gerade, welche zwischen den beiden vorgenannten liegt, bestimmt durch die Summe ihrer in den Querschnitt fallenden Strecken die Breite desselben an der betreffenden Stelle; die Breite in der Mitte wird auf solche Weise bestimmt durch diejenige zur Ebene von M senkrechte Gerade, welche durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht und welche die Axe des Kräftepaars M genannt werden soll.

Wenn für jeden Querschnitt die Breite in der Mitte nicht kleiner ist, als an einer anderen Stelle, so ist der durch die Vernachlässigung der Kraft R begangene Fehler schon dann sehr klein, wenn die Länge l des

---

*) Cf. No 17, letzte Gleichung, wo diese Kraft mit R_2 bezeichnet ist, ebenso wie das Moment M mit M_2.

Körpers kaum = seiner grössten Höhe h ist (cf. Nr. 174). Ist aber die Breite der Querschnitte gerade umgekehrt in der grössten Entfernung von der Axe des Paares M am grössten, so kann die Vernachlässigung der Kraft R auch bei grösserer Länge des Körpers wesentlich fehlerhaft sein. Besonders gilt dies von zusammengesetzten Trägern, welche, wie grössere Brückenträger, aus zwei von der Fläche der Axen der Paare M möglichst entfernt gehaltenen Haupttheilen (sog. Streckbalken, Rahmstücken, Gurtungen) bestehen, welche durch eine verhältnissmässig dünne Wand (oder einige solche Wände) oder durch ein System von Stäben mit einander verbunden sind; indem nämlich die Kraft R oder eine Componente derselben (cf. Nr. 17) als das Mass der Schnelligkeit betrachtet werden kann, womit das Moment M von einem zum andern Querschnitte sich ändert (abgesehen von den zwischen diesen beiden Querschnitten unmittelbar angreifenden äusseren Kräften), diese Veränderung aber bei einem auf die angedeutete Art zusammengesetzten Träger fast allein durch die wand- oder stabförmige Verbindung der beiden Streckbalken vermittelt wird, so werden die Anstrengungen dieser Verbindungstheile fast nur durch die Kräfte R bedingt, während die Streckbalken zumeist durch die Kräftepaare M in Anspruch genommen werden. Solche zusammengesetzte Träger sind deshalb in diesem Capitel, wenn auch nicht ganz, so doch wenigstens in Beziehung auf die Functionen und die Widerstandsfähigkeit der fraglichen mittleren Verbindungstheile ausgeschlossen.

38. — Damit für alle Querschnitte die in Nr. 16 mit M_1 bezeichneten Kräftepaare, deren Ebenen den betreffenden Querschnitten parallel sind, = Null sein können, muss vorausgesetzt werden, dass die Richtungslinien der äusseren Kräfte die Mittellinie des Körpers schneiden. Von der eigenen Schwere des Körpers, sofern sie als belastende Kraft berücksichtigt werden soll, wird diese Voraussetzung jedenfalls erfüllt, weil der Schwerpunkt jedes scheibenförmigen Körperelementes, welches von zwei unendlich nahen Querschnitten begrenzt wird, in der Mittellinie liegt.

Damit auch für alle Querschnitte die in Nr. 16 mit R_1 bezeichnete, tangential an die Mittellinie gerichtete Kraft = Null sein könne, muss ferner vorausgesetzt werden, dass die Richtungslinien der äusseren Kräfte die Mittellinie nicht nur überhaupt, sondern rechtwinkelig schneiden. Diese Bedingung wird von den Schwerkräften jener scheibenförmigen Körperelemente nur dann erfüllt, wenn die Mittellinie in einer horizontalen Ebene liegt; ist dies nicht der Fall, so werden in diesem Capitel die Schwerkräfte jener Körperelemente, wenn überhaupt, nur mit ihren zur Mittellinie senkrechten Componenten berücksichtigt, während die längs der Mittellinie gerichteten Componenten vernachlässigt werden.

Wäre nun aber die Mittellinie eine Curve, so würden trotz der gemachten Voraussetzungen die Kräfte R_1 noch nicht für alle Querschnitte = Null sein können, und muss deshalb noch vorausgesetzt werden, dass die Mittellinie eine gerade Linie sei. Die in diesem Capitel enthaltenen Resultate beziehen sich also nur auf

gerade stabförmige Körper,
deren gerade Mittellinie oder Axe von den Richtungslinien der äusseren Kräfte rechtwinkelig geschnitten wird, bevor die Biegung eintritt. Durch diese Biegung geht freilich die materiell gedachte Axe in eine Curve über, welche die elastische Linie genannt wird. Damit also alle vorgenannte Voraussetzungen, welche sich auf die ursprüngliche Form des Körpers beziehen, ohne wesentlichen Fehler auch für den durch die Biegung eintretenden Gleichgewichtszustand des belasteten Körpers gelten, worauf es eben ankommt, wird endlich noch vorausgesetzt, dass die Biegung sehr gering sei, derart, dass alle Tangenten der elastischen Linie mit der Axe des unbelasteten Körpers sehr kleine Winkel bilden.

Die primären belastenden Kräfte ändern gewöhnlich ihre Richtung nicht mit der Biegung des Körpers, insbesondere natürlich nicht, wenn sie z. B. Schwerkräfte sind. Die secundären Widerstandskräfte der Stützpunkte dagegen, welche auch zu den belastenden oder äusseren Kräften gehören, erfahren streng genommen durch die Biegung eine Aenderung ihrer Richtung und entsprechend auch eine solche ihrer Grösse, indem sie immer senkrecht zur Körperoberfläche gerichtet bleiben (abgesehen von der Reibung); entsprechend der Voraussetzung einer nur sehr unbedeutenden Biegung dürfen aber auch diese Widerstandskräfte senkrecht zur Axe des unbelasteten Körpers gerichtet angenommen werden.

39. — Wenn zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten F und F_1 nicht etwa eine äussere Kraft von endlicher Grösse angreift, so ist der Voraussetzung entsprechend, dass die Richtungslinien der äusseren Kräfte des Körperelementes FF_1 dessen Mittellinie OO_1 rechtwinkelig schneiden, ihre Momentensumme in Beziehung auf jede durch O gehende Axe im Querschnitte F unendlich klein zweiter Ordnung; die Relation (cf. Nr. 17)

$$\frac{dM}{ds} = R\sin(\beta-\alpha)$$

gilt deshalb auch mit Rücksicht auf die äusseren Kräfte, d. h. es ist $R\sin(\beta-\alpha)$ das wahre Mass der Schnelligkeit, womit sich M vom Querschnitte F zum Querschnitte F_1 im Abstande $OO_1 = ds$ ändert. Dabei ist α der Winkel, unter dem die Kraft R, β derjenige, unter welchem die Axe des Paares M gegen die Richtung des Krümmungsradius der elastischen Linie im Punkte O geneigt ist, beide Winkel vom Krümmungsradius aus im Sinne einer durch die Richtung O_1O als Axe repräsentirten, d. h. im Sinne einer rechtläufigen Drehung genommen von der Seite desjenigen Körpertheils aus gesehen, an welchem die durch R und M ersetzten äusseren Kräfte angreifen.

40. — Durch den Umstand allein, dass die Normalspannungen in den sämmtlichen Flächenelementen eines Querschnitts sich auf ein Kräftepaar müssen reduciren lassen, dessen Ebene parallel der Ebene von M und dessen

Moment $= M$ ist, ist das Vertheilungsgesetz dieser Spannungen im Querschnitte noch nicht bestimmt, und es wird deshalb eine Annahme in dieser Beziehung zu Hülfe genommen, welche darin besteht, dass die materiellen Querschnitte auch bei der Biegung genaue Ebenen und zur elastischen Linie senkrecht, dass sie mithin auch die Querschnitte des gebogenen Körpers bleiben, dessen Mittellinie eben die elastische Linie ist. Streng genommen ist diese Annahme zwar nur mit derjenigen Annäherung zulässig, mit welcher von der Verschiebung der Querschnitte, nämlich von der Wirkung der Kräfte R abstrahirt wird; indessen werden die Normalspannungen selbst dadurch kaum berührt, weil diese nicht sowohl von den Krümmungen der Querschnitte an und für sich, als vielmehr von dem Unterschiede dieser Krümmungen für zwei unendlich nahe benachbarte Querschnitte abhängen.

Sind nun O und O_1 zwei unendlich nahe Punkte der elastischen Linie, F und F_1 die entsprechenden Querschnitte des gebogenen Körpers, so fallen dieselben in die Normalebenen der Punkte O und O_1 der elastischen Linie und schneiden sich in der Krümmungsaxe des Punktes O. Diejenige Gerade im Querschnitte F, welche durch seinen Schwerpunkt O geht und mit der Krümmungsaxe des Punktes O der elastischen Linie parallel ist, heisse die Biegungsaxe des Querschnitts F.*) Der Ort der Biegungsaxen aller Querschnitte heisse die elastische Fläche; der Ort aller Tangenten der elastischen Linie heisse die Biegungsfläche. Die elastische Linie ist hiernach die Durchschnittslinie der elastischen und der Biegungsfläche; die Biegungsaxen sind senkrecht zur Biegungsfläche in den Punkten der elastischen Linie.

Theilt man die Körperscheibe zwischen F und F_1 durch eine Schaar von Kreiscylinderflächen, welche alle die Krümmungsaxe zur geometrischen Axe haben, und durch eine Schaar von Ebenen, welche zu dieser Axe senkrecht sind, in unendlich kleine Elemente 3[ter] Ordnung, so haben je zwei derselben, die zwischen denselben aufeinander folgenden Cylinderflächen liegen, gleiche Länge nach der Richtung OO_1, und da diese Längen auch vor der Biegung gleich waren, so folgt, dass in allen Punkten eines Querschnitts, welche in einer mit der Biegungsaxe parallelen Geraden liegen, die Ausdehnung ε gleich gross ist. Dasselbe gilt von den Spannungen σ, wenn von solchen Normalspannungen abstrahirt wird, die nach Richtungen senkrecht zu OO_1 stattfinden (cf. Nr. 16); denn dann ist $\sigma = E\varepsilon$, unter E den Elasticitätsmodul nach der Längenrichtung des Körpers verstanden.

Diejenige mit der Biegungsaxe parallele Gerade des Querschnitts F, in deren Punkten ε und $\sigma =$ Null sind, heisst die neutrale Axe dieses Querschnitts.

---

*) Sie ist dieselbe Gerade, welche nach Saint-Vénant in der Theorie der Curven doppelter Krümmung die Binormale des Punktes O der Curve (hier der elastischen Linie) genannt wird. Sie ist ebenso wie die Normalebenen F und F_1 und also auch deren Durchschnittslinie, die Krümmungsaxe, senkrecht zur Schmiegungsebene des Punktes O der Curve.

41. — Ist ε die Ausdehnung, σ die Spannung in einem Punkte des Querschnitts F, dessen Entfernung von der Biegungsaxe $= \eta$ ist (positiv auf der convexen, negativ auf der concaven Seite der elastischen Fläche), ε_0 die Ausdehnung in allen Punkten der Biegungsaxe und ϱ der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie im Schwerpunkte O von F (= der Entfernung der Krümmungsaxe von der Biegungsaxe), so ist:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (1 + \varepsilon_0) \frac{\eta}{\varrho}$$

oder mit Vernachlässigung des kleinen Gliedes 2ter Ordnung:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\eta}{\varrho}; \quad \sigma = E\varepsilon.$$

Hierdurch ist σ für jeden Punkt eines Querschnitts bestimmt, wenn ausser den betreffenden Werthen von ε_0 und ϱ auch die Lage der Biegungsaxe im Querschnitte bekannt ist.

Im Allgemeinen kann die Biegungsaxe mit der Axe des Paares M einen Winkel bilden, welcher von der Form des Querschnitts und von der Lage der letztgenannten Axe in demselben abhängt. Zerschnitte die durch O gehende Ebene des Paares M den Querschnitt F in zwei symmetrische Hälften, so fiele die Biegungsaxe mit der Axe des Paares M zusammen und die Schmiegungsebene des Punktes O der elastischen Linie mit der Ebene von M. Damit dasselbe für alle Querschnitte gelte, wird zunächst die folgende Voraussetzung gemacht, welche in den meisten Fällen der Praxis sich genau oder annäherungsweise erfüllt findet:

A. Die Richtungslinien aller äusseren Kräfte liegen in einer Ebene, welche Symmetrieebene des geraden stabförmigen Körpers ist.

42. — Diese Ebene — die Kraftebene — ist die gemeinschaftliche Ebene aller Paare M und die gemeinschaftliche Schmiegungsebene aller Punkte der elastischen Linie. Letztere ist also eine ebene Curve, die Biegungsfläche ist Biegungsebene und fällt mit der Kraftebene zusammen. Die Biegungsaxen und die neutralen Axen aller Querschnitte sind zur gemeinschaftlichen Biegungs- und Kraftebene senkrecht, und die elastische Fläche ist eine Cylinderfläche.

Der in Nr. 39 mit β bezeichnete Winkel ist jetzt $= 90°$, der Winkel $\alpha = 0$ oder $180°$, jenachdem R die Richtung des Krümmungsradius oder die entgegengesetzte Richtung hat; es ist also

$$\frac{dM}{ds} = \pm R,$$

und in denjenigen Querschnitten, für welche $R = 0$ ist, ist M ein Maximum oder Minimum, und zwar ein Maximum dann, wenn $\frac{dM}{ds}$ vom Positiven zum Negativen durch Null geht, d. h. wenn die Kraft R, nachdem sie in den vorhergehenden Querschnitten die Richtung des Krümmungsradius hatte, in die entgegengesetzte Richtung übergeht.

Die elastische Linie wird im Folgenden auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogen, dessen Abscissenaxe, wo nicht eine andere Lage ausdrücklich bemerkt ist, in der ursprünglich geraden Axe des Stabes liegen, jedenfalls derselben parallel sein soll; die Ordinatenaxe ist dann stets parallel den Richtungslinien der äusseren Kräfte. Zur Erleichterung des Ausdrucks mögen die Letzteren bei der Darstellung der betreffenden Gesetze und Formeln vertical gerichtet angenommen werden; die Abscissenaxe ist dann horizontal, die Ordinatenaxe vertical, und zwar sei sie abwärts gerichtet positiv. Sind dann die primären äusseren Kräfte Schwerkräfte, so haben sie die Richtung der positiven Ordinatenaxe, und es ist in den Querschnitten $R = 0$ das Moment M ein Maximum oder Minimum, jenachdem an den betreffenden Stellen die elastische Linie concav nach Oben oder nach Unten ist.

Natürlich gelten die unter dieser Voraussetzung gefundenen Gesetze auch für jede nicht horizontale Lage der ursprünglich geraden Stabaxe, sofern wenigstens die eigene Schwere des Stabes entweder ganz vernachlässigt oder nur mit ihrer zur Axe senkrechten Componente berücksichtigt wird.

Im Allgemeinen wird die Abscissenaxe als x-Axe, die Ordinatenaxe als y-Axe angenommen und die Biegung als so gering vorausgesetzt (cf. Nr. 38), dass ohne wesentlichen Fehler der Krümmungsradius der elastischen Linie:

$$\varrho = \pm \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ statt } \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

gesetzt werden kann. Entsprechend wird auch statt des Sinus oder der Tangente des Winkels, den die elastische Linie mit der x-Axe bildet, immer dieser Winkel selbst gesetzt.

43. — Ist dF der Inhalt eines der Biegungsaxe im Abstande η parallelen unendlich schmalen Flächenstreifens des Querschnitts F, σ die Spannung in allen Punkten desselben, so folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\int \sigma dF = 0; \int \sigma dF \cdot \eta = M$$

in Verbindung mit $\sigma = E\left(\varepsilon_0 + \frac{\eta}{\varrho}\right)$ nach Nr. 41:

$$\varepsilon_0 = 0 \text{ und } \frac{EJ}{\varrho} = M,$$

wenn mit J das Trägheitsmoment des Querschnitts in Beziehung auf die Biegungsaxe bezeichnet wird, welches in der Folge kurzweg das Trägheitsmoment des Querschnitts genannt werden soll; es ist

$$J = \int \eta^2 dF$$

d. h. die Summe der Producte aus den Inhalten der Flächenelemente und den Quadraten ihrer Abstände von der Biegungsaxe.

Die Gleichung $\varepsilon_0 = 0$ lehrt, dass die Biegungsaxe mit der neutralen Axe zusammenfällt.

Die Gleichung $\frac{EJ}{\varrho} = M$ dient in Verbindung mit $\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d^2y}{dx^2}$ durch zweifache Integration zur Bestimmung der angenäherten Gleichung der elastischen Linie, sofern J und M bekannte Functionen von x sind. Aus ihr folgt:

$$\sigma = E\frac{\eta}{\varrho} = \frac{M\eta}{J}.^{*)}$$

Die Grösse $\frac{EJ}{\varrho} = M =$ Momentensumme der Spannungen eines Querschnitts in Beziehung auf die Biegungsaxe heisst hinfort kurzweg das **Spannungsmoment** des Querschnitts.

44. — Ist für irgend einen Querschnitt
e' der grösste Werth eines positiven η,
e'' der grösste Absolutwerth eines negativen η,
σ' die grösste Spannung im engern Sinne,
σ'' die grösste Pressung, so ist

$$\sigma' = \frac{Me'}{J}; \; \sigma'' = \frac{Me''}{J}.$$

Beide Werthe ändern sich im Allgemeinen von einem zum andern Querschnitte, und es darf dabei σ' höchstens $= k'$, σ'' höchstens $= k''$ werden. (Cf. Nr. 20.) Dieser Forderung wird entsprochen, indem man die Verhältnisse so wählt, dass der grössere der beiden Quotienten

$$\frac{max.\,\sigma'}{k'} \text{ und } \frac{max.\,\sigma''}{k''}$$

$= 1$ wird; der Querschnitt, in welchem dies der Fall ist, heisst der **Bruchquerschnitt**.

---

*) Das Resultat des Zusammenfallens der Biegungsaxe und neutralen Axe ist wesentlich falsch für die Querschnitte in der Nähe derjenigen, für welche $M = 0$ ist. Es beruht nämlich wesentlich auf der Gleichung

$$\int \sigma dF = 0, \text{ wofür eigentlich } \int \sigma dF = R_1$$

gesetzt werden muss, unter R_1 die in Nr. 16 näher bezeichnete positive oder negative Kraft verstanden, welche freilich sehr klein, nämlich dem *sinus* des Neigungswinkels der elastischen Linie gegen die x-Axe proportional ist. Mit Rücksicht hierauf erhält man:

$$\varepsilon_0 = \frac{R_1}{EF}, \text{ während die Gleichung } \frac{EJ}{\varrho} = M$$

unverändert bleibt. Die neutrale Axe erhält aber jetzt den Abstand

$$\eta_0 = -\frac{RJ}{MF}$$

von der Biegungsaxe, rückt also in denjenigen Querschnitten, für welche $M = 0$ ist, sogar ins Unendliche auf der einen oder anderen Seite je nach dem Vorzeichen von R_1. Für σ erhält man:

$$\sigma = \frac{R_1}{F} + \frac{M\eta}{J}$$

und kann hier das erste Glied trotz seiner Kleinheit das zweite überwiegen in der Nähe der Querschnitte $M = 0$. Weil aber die genauere Kenntniss von σ in diesen Querschnitten ohne praktisches Interesse ist, so ist überhaupt ein praktisches Bedürfniss zur Anbringung der hier bezeichneten Correctionen an den oben unter Nr. 43 angeführten Resultaten nicht vorhanden.

Damit die Zug- und die Druckfestigkeit des Materials in gleichem Masse verwerthet werden, sind die Verhältnisse so zu wählen, dass *gleichzeitig*

$$\frac{max.\ \sigma'}{k'} = \frac{max.\ \sigma''}{k''} = 1$$

wird, was im Allgemeinen in zwei verschiedenen Querschnitten der Fall sein kann, die dann beide Bruchquerschnitte sind. Besser ist es aber, in *jedem einzelnen* Querschnitte die Zug- und Druckfestigkeit in gleichem Masse auszunutzen, also für jeden

$$\frac{\sigma'}{k'} = \frac{\sigma''}{k''}$$

zu machen, was dadurch geschieht, dass die Form jedes Querschnittes und seine Lage gegen die Kraftebene der Bedingung

$$\frac{e'}{k'} = \frac{e''}{k''}$$

entsprechend gemacht wird. Dann wird auch in demselben Querschnitte, welcher demnach alleiniger Bruchquerschnitt ist, zugleich

$$\frac{max.\ \sigma'}{k'} = \frac{max.\ \sigma''}{k''} = 1.$$

Immerhin aber würde es im Allgemeinen nur dieser einzige Querschnitt sein, in welchem die Zug- und die Druckfestigkeit des Materials vollständig ausgenutzt werden; damit es in allen der Fall sei und dadurch ein sogenannter *Körper von gleichem Widerstande* hervorgehe, müsste der Querschnitt entsprechend der Veränderlichkeit von M derart veränderlich gemacht werden, dass in jedem Querschnitte

$$\frac{\sigma'}{k'} = \frac{\sigma''}{k''} = 1, \text{ also } \frac{Me'}{Jk'} = \frac{Me''}{Jk''} = 1$$

ist. Selbst dann wird nur in den äussersten Punkten aller Querschnitte die Widerstandsfähigkeit des Materials vollständig verwerthet, in den übrigen aber um so weniger, je näher sie der Biegungsaxe liegen. Dies ist ein unvermeidlicher Mangel bei einem *nur* auf Biegungsfestigkeit in Anspruch genommenen *stetigen* stabförmigen Körper, und es lässt sich die dadurch bedingte Materialverschwendung nur bis zu gewissem Grade vermindern, indem man, soweit es die Umstände gestatten, die Masse des Körpers in möglichst grosser Entfernung von der elastischen Fläche auf beiden Seiten anhäuft, also J möglichst gross macht bei gegebenem F. Bei einem aus einzelnen stabförmigen Theilen *zusammengesetzten Träger* indessen lässt es sich erreichen, und es ist dies eben der Zweck einer solchen, freilich nur bei grossen Dimensionen (z. B. bei Brückenträgern) sich lohnenden Construction, dass alle Theile fast nur gezogen oder gedrückt werden, dass also in den Querschnitten der einzelnen Theile die Spannungen oder Pressungen fast gleichförmig vertheilt sind und somit die Widerstandsfähigkeit des Materials bei angemessener Grösse der einzelnen Querschnitte fast vollkommen verwerthet wird.

45. — Bei den Fällen der Biegungsfestigkeit, welche im Maschinenbau vorkommen, überhaupt bei beweglichen Constructionen im Gegensatze zu den unbeweglichen des Ingenieur- und Baufachs ist es meistens nöthig, dass die Widerstandsfähigkeit des betreffenden Körpers entweder nur bei der Umkehrung der Kraftrichtungen oder selbst dann ungeändert bleibe, wenn die Kraftebene sich beliebig um die Körperaxe dreht. Der erste Fall (z. B. Zähne von Zahnrädern, Arme von Rädern und Riemenrollen etc.) bedingt Querschnittsformen, welche in Beziehung auf die Biegungsaxe, folglich in Beziehung auf zwei sich rechtwinkelig schneidende Axen symmetrisch sind, da der zur Biegungsaxe senkrechte Schnitt der Kraftebene mit dem Querschnitte hier stets als Symmetrieaxe des letzteren vorausgesetzt wird; im zweiten Falle (z. B. tragende Wellen und Wellzapfen) müssen diesen beiden Symmetrieaxen zudem gleich grosse Trägheitsmomente des Querschnitts entsprechen, so dass also dieses Moment überhaupt constant ist für alle Geraden, welche durch den Schwerpunkt des Querschnitts in seiner Ebene gezogen werden können. In beiden Fällen ist immer $e' = e''$ und muss deshalb, wenn k' nicht $= k''$ ist, auf die gleichmässige Verwerthung der Zug- und Druckfestigkeit des Materials verzichtet werden; es kommt dann nur der kleinere der beiden Werthe k' und k'' als massgebend in Betracht, welcher in der Folge mit k bezeichnet wird, ebenso wie jeder der gleichen Abstände e' und e'' mit e.

Ferner ist es bei einfachen, d. h. nicht aus verschiedenen Theilen zusammengesetzten stabförmigen Körpern theils wegen des natürlichen Vorkommens (insbesondere bei hölzernen Balken), theils mit Rücksicht auf die praktische Herstellung oder wegen gewisser Nebenbedingungen oft nicht möglich oder wenigstens nicht vortheilhaft, eine der theoretisch rationellsten Form eines Körpers von gleichem Widerstande genau oder näherungsweise entsprechende Körperform zu wählen, sondern ist vielmehr die möglichst einfache Form eines geraden stabförmigen Körpers mit constantem Querschnitte durch die Umstände vorgezeichnet. In anderen Fällen, namentlich des Maschinenbaues, ist, wenn auch der Querschnitt nicht genau constant sein sollte, doch eine theoretische Berücksichtigung seiner Veränderlichkeit überflüssig. Es wird deshalb im Folgenden dieser Specialfall des constanten Querschnittes einer besonders eingehenden Behandlung unterworfen, um so mehr, als die für ihn geltenden Gesetze auch bei der Berechnung grösserer Träger von veränderlichem Querschnitte als erste Annäherungen gute Dienste leisten.

46. — In dieser und in den folgenden Nummern sind die Trägheitsmomente J der am häufigsten vorkommenden und einfacheren Querschnittsformen enthalten; in den Figuren ist mit J die Axe bezeichnet, worauf sich das ebenso bezeichnete Trägheitsmoment bezieht.

Unter den in Beziehung auf die Biegungsaxe symmetrischen Querschnittsformen ist

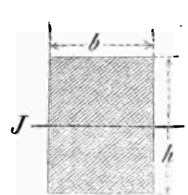


Fig. 1.

das Rechteck (Fig. 1) die einfachste; dafür ist:

$$J = \frac{bh^3}{12};\ e = \frac{h}{2}.$$

Um bei gegebenem Inhalte F des Querschnitts die Function

$$\frac{J}{e} = \frac{bh^2}{6} = F.\frac{h}{6}$$

möglichst gross zu machen, muss h möglichst gross, also b entsprechend klein gemacht werden; damit aber diese Vergrösserung von $\frac{J}{e}$ nicht auf Kosten der nöthigen Widerstandsfähigkeit gegen die zufällige Einwirkung von Seitenkräften geschehe, empfehlen sich noch mehr die folgenden vom Rechtecke abgeleiteten Querschnittsformen:

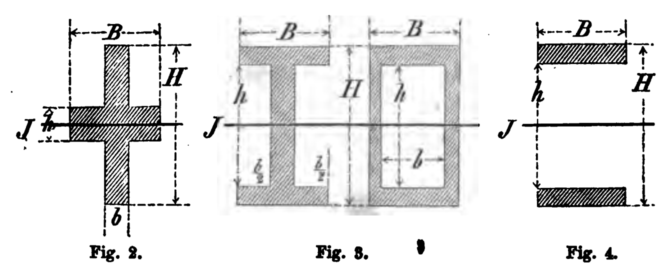


Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

Kreuzförmiger Querschnitt (Fig. 2):

$$J = \frac{bH^3 + (B-b)h^3}{12};\ e = \frac{H}{2}.$$

Doppelt-Tförmiger und hohler rechteckiger Querschnitt (Fig. 3):

$$J = \frac{BH^3 - bh^3}{12};\ e = \frac{H}{2}.$$

Doppelt-rechteckiger Querschnitt (Fig. 4), wobei eine Verbindung beider Theile durch Verstrebung vorausgesetzt ist, deren geringer Einfluss auf das Trägheitsmoment des resultirenden Querschnitts vernachlässigt wird:

$$J = \frac{B(H^3 - h^3)}{12};\ e = \frac{H}{2}.$$

Bei einem rechteckigen Balken von Holz, der aus einem runden Stamme geschlagen werden soll, ist das erreichbare Maximum der Function $\frac{J}{e}$ ein durch jene Bedingung beschränktes, und die Aufgabe kommt darauf hinaus, in einem Kreise vom Durchmesser d ein Rechteck so zu zeichnen, dass, unter b die kleinere und unter h die grössere Seite verstanden, die Function bh^2 ein Maximum wird; die Lösung ist:

$$b = d\sqrt{\frac{1}{3}};\ h = d\sqrt{\frac{2}{3}};$$

die Construction des fraglichen Rechtecks ist dadurch bestimmt, dass die Projectionen der Seiten b und h auf die Diagonale d sich wie 1 : 2 verhalten.

47. — Das Trägheitsmoment eines **regulären Polygons** ist für jede in seiner Ebene durch seinen Mittelpunkt gehende Axe:

$$J = \frac{F}{12}\left(3r^2 - \frac{s^2}{2}\right),$$

unter F den Inhalt, s die Seite des Polygons und unter r den Radius des umschriebenen Kreises verstanden; e' und e'' sind je nach der Lage der Biegungsaxe verschieden zwischen den Radien des um- und des einbeschriebenen Kreises als äussersten Grenzen. Bei rotirenden Wellen, wo dergleichen Querschnitte hauptsächlich vorkommen, ist als ungünstigster Fall $e' = e'' = r$ zu setzen.

Mit $s = 0$ erhält man das Trägheitsmoment eines **Kreises** vom Radius r für einen beliebigen Durchmesser:

$$J = \frac{\pi r^4}{4};\; e = r;$$

daraus das Trägheitsmoment einer **Ellipse** mit den Halbaxen a und b, bezogen auf die Hauptaxe $= 2a$:

$$J = \frac{\pi a^4}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{\pi a b^3}{4};\; e = b.$$

48. — Unter den in Beziehung auf die Biegungsaxe nicht symmetrischen Querschnitten ist der **doppelt-Tförmige Querschnitt** der gewöhnlichste und bildet wenigstens die Grundform anderer zusammengesetzterer Formen ähnlichen Charakters. Bei demselben ist mit Rücksicht auf Fig. 5 die Lage der Biegungsaxe bestimmt durch:

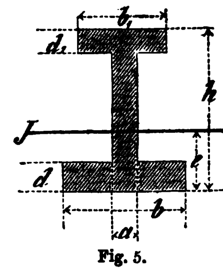


Fig. 5.

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{ah^2 + (b-a)d^2 + (b_1-a)\,d_1(2h-d_1)}{ah + (b-a)\;d + (b_1-a)d_1};$$

mit $e_1 = h-e$, $f = e-d$, $f_1 = e_1-d_1$ ist dann ferner:

$$J = \frac{1}{3}\left[b e^3 + b_1 e_1^3 - (b-a)f^3 - (b_1-a_1)f_1^3\right].$$

Mit $b_1 = a$ erhält man hieraus für den **Tförmigen Querschnitt** (Fig. 6):

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{ah^2 + (b-a)d^2}{ah + (b-a)d};$$

$$e_1 = h-e;\; f = e-d;$$

$$J = \frac{1}{3}\left[b e^3 + a e_1^3 - (b-a)f^3\right].$$

Fig. 6.

Ist ein solcher Querschnitt durch n Elemente bestimmt, so kann man im Allgemeinen $n-2$ Relationen zwischen denselben willkürlich annehmen und eine weitere der Forderung gemäss ansetzen, dass

$$\frac{e'}{k'} = \frac{e''}{k''}$$

sein soll; hiernach sind alle n Elemente durch eins derselben bestimmt, welches schliesslich davon abhängt, dass $\frac{\sigma'}{k'} = \frac{\sigma''}{k''}$ im Bruchquerschnitte oder

bei einem Körper von gleichem Widerstande in allen Querschnitten $= 1$ sein soll.

49. — Bei Berechnung der Function J für gewisse Querschnittsformen und bei gewissen Lagen derselben gegen die Biegungsaxe ist es oft bequemer, zunächst das Trägheitsmoment $= J_1$ für eine andere Axe zu berechnen, welche der Biegungsaxe im Abstande a parallel ist; die Reduction auf letztere geschieht dann mittels der Gleichung:

$$J = J_1 - Fa^2.$$

Bei Berechnung von J_1 für solche Querschnitte, welche sich als algebraische Summen von Rechtecken und Dreiecken, die mit ihren Grundlinien auf der betreffenden Parallelaxe stehen, betrachten lassen, ist es nützlich zu bemerken, dass das Trägheitsmoment eines Rechtecks bh für seine Grundlinie b:

$$J_1 = \frac{bh^3}{3}$$

und dasjenige eines Dreiecks von der Grundlinie b und Höhe h für seine Grundlinie:

$$J_1 = \frac{bh^3}{12}$$

ist.

Wenn der Querschnitt durch eine empirische oder durch eine sehr complicirte mathematische Curve begrenzt ist, kann zur Berechnung von J irgend eine der bekannten Näherungsformeln zur Berechnung eines bestimmten Integrals (mechanische Quadratur) angewendet werden. Z. B. man theile die Höhe h (cf. Nr. 37) in eine gerade Anzahl gleicher Theile:

$$h = na$$

und messe die Breiten

$$y_0 \; y_1 \; y_2 \; \dots \; y_n$$

in den Abständen $0 \; a \; 2a \dots na$ von der Grundlinie OY (Fig. 7), d. h. von einer der beiden zur Kraftebene senkrechten Geraden, welche den Querschnitt berührend zwischen sich fassen, so ist:

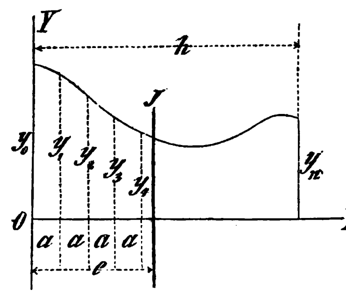


Fig. 7.

$$F = \frac{a}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n\right);$$

ferner der Abstand der Biegungsaxe von der Grundlinie:

$$e = \frac{a^2}{3F}\left(4y_1 + 2.2y_2 + 4.3y_3 + 2.4y_4 + \dots + 4(n-1)y_{n-1} + ny_n\right)$$

und das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Grundlinie:

$$J_1 = \frac{a^3}{3}\left(4y_1 + 2.2^2y_2 + 4.3^2y_3 + 2.4^2y_4 + \dots + 4(n-1)^2y_{n-1} + n^2y_n\right);$$

endlich

$$J = J_1 - Fe^2.$$

Diese Formeln können u. A. zur Berechnung der Function J und der Lage der Biegungsaxe für den Querschnitt einer Eisenbahnschiene und in ähnlichen Fällen Anwendung finden.

I. Gerader stabförmiger Körper von constantem Querschnitte.

50. — Hat in diesem Falle die elastische Linie keine Inflexionspunkte, d. h. ist sie überall nach derselben Seite concav gebogen, so ist der Bruchquerschnitt (cf. Nr. 44) derjenige, für welchen das resultirende Moment der äusseren Kräfte am grössten ist, und der Forderung, dass $max.\ \sigma'$ höchstens $= k'$ und $max.\ \sigma''$ höchstens $= k''$ sei, wird dadurch entsprochen, das $max.\ M$ dem kleineren der beiden Werthe

$$k'\frac{J}{e'} \quad \text{und} \quad k''\frac{J}{e''}$$

gleich gesetzt wird, welcher das Widerstandsmoment des Stabes für den betreffenden Sinn der Biegung genannt und mit W bezeichnet werden möge.

Ist $k' = k'' = k$ oder $e' = e'' = e$, so ist

$$W = k\frac{J}{e},$$

unter e im 1ten Falle den grösseren der Werthe e' und e'',
„ k „ 2ten Falle „ kleineren „ „ k' „ k''
verstanden.

Wird der Forderung entsprochen, dass die Zug- und die Druckfestigkeit des Materials in jedem Querschnitte in gleichem Grade in Anspruch genommen werden sollen, so ist

$$W = k'\frac{J}{e'} = k''\frac{J}{e''}.$$

Hat aber die elastische Linie Inflexionspunkte, so tauschen e' und e'' für die entgegengesetzt gebogenen Stabstrecken ihre Werthe um und ist deshalb das Widerstandsmoment W' für die nach Oben concav gebogenen Stabtheile im Allgemeinen von demjenigen $= W''$ für die nach Unten concav gebogenen Stabtheile verschieden; ist dann $max.\ M'$ der grösste Werth von M für die ersteren, $max.\ M''$ der grösste Werth von M für die letzteren Stabstrecken, so wird der Forderung, dass $max.\ \sigma' = k'$ und $max.\ \sigma'' = k''$ sein soll, dadurch entsprochen, dass der grössere der beiden Quotienten

$$\frac{max.\ M'}{W'} \quad \text{und} \quad \frac{max.\ M''}{W''}$$

$= 1$ gesetzt wird; der betreffende Querschnitt, wo dieser Maximalwerth $= 1$ stattfindet, ist der Bruchquerschnitt.

Ist in diesem Falle $k' = k'' = k$ oder $e' = e'' = e$, so ist

$$W' = W'' = k\frac{J}{e},$$

wenn im 1ten Falle unter e der grössere der beiden Werthe e' und e'', im 2ten Falle unter k der kleinere der beiden Werthe k' und k'' verstanden wird,

und der Bruchquerschnitt ist derjenige, für welchen M am grössten ist, einerlei ob daselbst der Stab nach Oben oder nach Unten concav gebogen ist.

Die Bedingung, dass die Zug- und die Druckfestigkeit in gleichem Grade verwerthet werden, erfordert eine entgegengesetzte Lage des Querschnitts gegen die Biegungsaxe in den entgegengesetzt gebogenen Stabstrecken, wodurch die Kenntniss der Inflexionspunkte von constructiver Wichtigkeit wird; auch in diesem Falle ist $W' = W''$ und der Bruchquerschnitt derjenige, für welchen M am grössten ist.

Bei den im Folgenden betrachteten besonderen Fällen wird vorausgesetzt, dass alle primären Kräfte in gleichem Sinne gerichtet seien: vertical abwärts, wenn der Stab horizontal liegend gedacht wird.

a. Der Stab ist am einen Ende befestigt, am anderen frei.

51. — A sei das befestigte, B das freie Ende des Stabes, die Länge $AB = l$.

M ist am grössten im Querschnitte bei A. Hat der Stab eine über seiner ganzen Länge gleichförmig vertheilte Last Q und ausserdem eine bei B concentrirte Last P zu tragen, so ist:

$$max.\, M = \left(P + \frac{Q}{2}\right) l.$$

Sind ausser der gleichförmig vertheilten Last Q
verschiedene Lasten $P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \ldots$ vorhanden, welche
in den Abständen $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots$ vom Ende A angreifen,
so ist:

$$max.\, M = \Sigma(Pa) + \frac{Ql}{2}.$$

52. — Wellzapfen.

Ist l die Länge, d der Durchmesser eines cylindrischen Zapfens, der durch die rechtwinkelig gegen die Zapfenaxe gerichtete Reaction P des Lagers auf Biegungs-Festigkeit in Anspruch genommen wird, so darf P als gleichförmig auf der Länge l vertheilt vorausgesetzt werden, und erhält man dann mit $l = \alpha d$ durch Gleichsetzen

$$\text{von } max.\, M = \frac{P.\alpha d}{2}$$

$$\text{mit } W = k\frac{J}{e} = k\frac{\pi d^3}{32}:$$

$$d = \sqrt{\frac{16\alpha}{\pi k}} . \sqrt{P} = 2{,}26 \sqrt{\frac{\alpha P}{k}}.$$

Dabei kann, wenn n die Umdrehungszahl pro Minute ist,

$$\alpha = 1{,}2 + \frac{n}{60d}$$

bis zu $\alpha = 3$ gesetzt werden, indem namentlich, je grösser n, eine desto grössere Auflagerfläche zur Verhütung übermässiger Erhitzung und Abnutzung des Zapfens

erforderlich ist. Bei mässig schnellem Gange, etwa bis $n = 60$, kann auch übereinstimmend

$$\alpha = 1,2 + \frac{1}{d}$$

genommen werden und mit Redtenbacher

$$d = 0,18\sqrt{P} \text{ für gusseiserne Zapfen, entsprechend } k = 189 + \frac{157}{d},$$

$$d = 0,12\sqrt{P} \text{ „ schmiedeeiserne „ „ } k = 424 + \frac{354}{d}.$$

Für Zapfen von Stahl kann unter solchen Umständen gesetzt werden:

$$d = 0,09\sqrt{P}, \text{ entsprechend } k = 786 \text{ bei } \alpha = 1,25.$$

53. — Radzähne.

Ist a die Zahndicke im Theilkreise,
l die Länge, nach der Richtung des Radius gemessen,
b die Breite des Zahns = der Radbreite,

so ist unter der Voraussetzung, dass der Druck P*) in der äusseren Kante des Zahns angreift, gleichförmig in der ganzen Breite b vertheilt und senkrecht zur Länge l gerichtet, dass auch die Zahndicke an der Wurzel nicht wesentlich von a verschieden ist, die der Gleichung

$$Pl = k\frac{ba^2}{6}$$

entsprechende Zahndicke: $a = \sqrt{\frac{6\lambda}{k\beta}} . \sqrt{P}$,

wenn $l = \lambda a$, $b = \beta a$ gesetzt wird. Nimmt man für gusseiserne Zähne $\lambda = 1,5$ und $k = 90$, so wird

$$a = \sqrt{\frac{P}{10\beta}}$$

und mit $\beta = 6$ als Mittel für gewöhnliche Transmissionen:**)

$$a = 0,13\sqrt{P}.$$

Wenn hölzerne Zähne mit eisernen zusammen arbeiten, so kann für erstere bei gleichen Werthen von l und b die Dicke $a_1 = 1,5a$ gesetzt werden, entsprechend $k_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 . 90 = 40$.

Uebrigens kann sich bei ungenauer Lagerung der Wellen, mangelhafter Ausführung der Räder oder beim Dazwischenkommen eines kleinen Körpers der noch ungünstigere Fall ereignen, dass der Druck P sich an einer Zahnecke concentrirt und dieselbe abzubrechen droht, am wahrscheinlichsten in einer Bruchfläche,

---

*) Aus der Anzahl der übertragenen Pferdestärken $= N$, der Umdrehungszahl pro Minute $= n$ und dem Theilrissradius $= r$ Centimeter findet man

$$P = 71620\frac{N}{rn} \text{ Kilogr.},$$

wenn ungünstigsten Falls nur ein Paar Zähne in gegenseitiger Berührung befindlich vorausgesetzt wird.

**) Bei Maschinen, die durch Menschenkraft mit geringer Geschwindigkeit bewegt werden (z. B. Winden), ist β kleiner bis $= 4$, bei sehr schnell laufenden Rädern aber grösser bis $= 8$ zu setzen.

welche unter 45° gegen die Stirnfläche des Zahns geneigt ist. Diesem Falle entspricht die Maximalspannung

$$\frac{\beta}{2\lambda}k = 2k \text{ für } \lambda = 1{,}5 \text{ und } \beta = 6,$$

wodurch der nur kleine Werth $k = 90$ gerechtfertigt ist.

Aus der Zahndicke a findet man die Theilung der Räder
bei blos eisernen Zähnen etwas $>$ $2a$, etwa $= 2{,}1a$,
bei eisernen mit hölzernen „ $>$ $2{,}5a$, „ $= 2{,}65a$.

54. — Wenn der am Ende A befestigte Stab eine am freien Ende B concentrirte Last P nebst einer auf seiner ganzen Länge $AB = l$ gleichförmig vertheilten Last Q zu tragen hat, so findet man die angenäherte Gleichung der elastischen Linie für das aus Fig. 8 ersichtliche Coordinatensystem durch zweimalige Integration der Differentialgleichung:

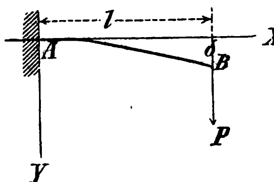


Fig. 8.

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = P(l-x) + Q\frac{(l-x)^2}{2l}$$

(cf. Nr. 43) wie folgt:

$$EJ.y = P\frac{x^2(3l-x)}{6} + Q\frac{x^2(6l^2-4lx+x^2)}{24l};$$

daraus mit $x = l$ die Durchbiegung am Ende B, d. h. den Maximalwerth von y:

$$\delta = \frac{P + \frac{3}{8}Q}{EJ}\frac{l^3}{3}.$$

$$\text{Mit } Q = o \text{ ist } \delta = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3} = \frac{2}{3}l\beta$$

$$\text{„ } P = o \text{ „ } \delta = \frac{Q}{EJ}\frac{l^3}{8} = \frac{3}{4}l\beta,$$

wenn β den Winkel bedeutet, unter welchem die Tangente der elastischen Linie bei B gegen die x-Axe geneigt ist.

55. — Wenn der Stab AB nach irgend einem anderen Gesetze belastet ist, wobei im Allgemeinen von A nach B gerechnet
an gewissen Stellen C_1 C_2 C_3 . . .
in den Abständen a_1 a_2 a_3 . . . von A eine Stetigkeitsunterbrechung der Belastung stattfindet, so erfährt die elastische Linie daselbst ensprechende Unterbrechungen ihrer Stetigkeit, und es haben die einzelnen Strecken AC_1, C_1C_2, C_2C_3 ... ihre besonderen Gleichungen, welche auf folgende Weise gefunden werden, wenn
bei C_1 C_2 C_3 . . .
mit γ_1 γ_2 γ_3 . . . die Neigungswinkel der elastischen Linie gegen AX
und mit δ_1 δ_2 δ_3 . . . die betreffenden Ordinaten oder Durchbiegungen bezeichnet werden.

Bei gegebener Belastung und gegebenem Querschnitte ergiebt sich aus der Momentengleichung

$$\frac{EJ}{\varrho} = EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M \text{ (cf. Nr. 43)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \text{einer bekannten Function } f(x),$$

welche aber für die verschiedenen Strecken AC_1, C_1C_2 . . . verschieden ist. Ist nun für die Strecke AC_1

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_1(x), \text{ so folgt daraus durch Integration:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x), \text{ Constante bestimmt durch: } x = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0;$$

$$y = \psi_1(x), \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad x = 0,\ y = 0;$$

daraus mit $x = a_1$: $\gamma_1 = \varphi_1(a_1)$; $\delta_1 = \psi_1(a_1)$.

Ist dann für die zweite Strecke C_1C_2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_2(x), \text{ so folgt für dieselbe:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_2(x), \text{ Constante bestimmt durch } x = a_1,\ \frac{dy}{dx} = \gamma_1;$$

$$y = \psi_2(x), \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad x = a_1,\ y = \delta_1;$$

daraus mit $x = a_2$: $\gamma_2 = \varphi_2(a_2)$; $\delta_2 = \psi_2(a_2)$ u. s. w.

56. — Eine Stetigkeitsunterbrechung der Belastung an einer gewissen Stelle C im Abstande a von A rührt entweder davon her, dass daselbst eine Kraft P von endlicher Grösse angreift, oder davon, dass die stetig vertheilte Belastung $= p$ pro Längeneinheit sich daselbst plötzlich um einen endlichen Werth Δp ändert. Im Ausdrucke von M kommt in Folge dessen beim Passiren des Querschnitts C, wenn man von B nach A fortschreitet,

im ersten Falle das Glied $P(a-x)$

„ zweiten „ „ „ $\pm \Delta p \frac{(a-x)^2}{2}$

hinzu, und es ändert sich also bei C

im ersten Falle $\frac{dM}{dx}$,

„ zweiten „ $\frac{d^2M}{dx^2}$

um eine endliche Grösse, entsprechend einer Stetigkeitsunterbrechung der 2ten resp. 3ten Ordnung von $M = EJ\frac{d^2y}{dx^2}$, also der 4ten resp. 5ten Ordnung von y.

Diese Bemerkung gilt für jede Art der Unterstützung oder Befestigung des Stabes.

b. Der Stab ist an beiden Enden unterstützt oder befestigt.

57. — Dieser Fall schliesst die 3 Specialfälle in sich, dass der Stab AB an beiden Enden nur gestützt, oder am einen Ende gestützt und am anderen befestigt, oder endlich an beiden Enden befestigt ist. Sind

A und B die durch die primären belastenden Kräfte hervorgerufenen Widerstände der Stützen oder Befestigungen an den gleich bezeichneten Stabenden,

$[A]$ und $[B]$ die in den äussersten Querschnitten daselbst hervorgerufenen Spannungsmomente,

α und β die Winkel, unter welchen die elastische Linie bei A resp. B gegen die gerade Verbindungslinie AB ihrer Endpunkte geneigt ist,

so ist $[A]$ oder $[B] = 0$, wenn bei A oder B der Stab nur gestützt ist, und es ist deshalb derjenige der 3 genannten Specialfälle, bei welchem der Stab an beiden Enden befestigt ist, der allgemeinste, aus welchem die beiden anderen durch die Voraussetzung abgeleitet werden können, dass eines der beiden Spannungsmomente $[A]$ und $[B]$ oder dass beide $= 0$ seien.

Umgekehrt kann auf diesen Fall des beiderseits unter beliebigen Winkeln α und β geneigt befestigten Stabes auch der noch allgemeinere Fall zurückgeführt werden, dass zwischen den Stützen oder Befestigungen an den Enden des Stabes sich noch eine beliebige Zahl von Zwischenstützen befindet: cf. Nr. 91—100.

Hinsichtlich der Art der Belastung des Stabes sind unendlich viele Fälle möglich, und kann deshalb die Art der Behandlung der betreffenden Aufgaben (ähnlich wie in Nr. 55) im Allgemeinen nur angedeutet werden: cf. Nr. 88.

Specieller ausgeführt wird der Fall, dass die Belastung in einer gleichförmig auf der ganzen Länge $AB = l$ vertheilten Last $Q = pl$ und in solchen Kräften $P_1 P_2 \ldots$ besteht, welche in gewissen Punkten $C_1 C_2 \ldots$ concentrirt angreifen, ein Fall, welcher seinerseits wieder auf den noch einfacheren zurückgeführt wird, dass ausser der gleichförmig vertheilten Last Q nur eine einzige solche in einem Punkte C concentrirte Last P vorhanden ist.

Der Stab wird dabei horizontal liegend gedacht, während die primären Kräfte wie Schwerkräfte lothrecht wirkend vorausgesetzt werden; die unter dieser Voraussetzung entwickelten Formeln gelten allgemein für den Fall, dass alle primären Kräfte in gleichem Sinne gerichtet sind, falls nur diese Richtung überall der lothrechten und die geneigte Richtung der Stabaxe der horizontalen Richtung substituirt wird.

58. — Die elastische Linie AB ist jetzt im Allgemeinen nicht mehr wie im vorigen Falle sub **a.** in ihrer ganzen Erstreckung nach derselben Seite, sondern theilweise nach Oben, theilweise nach Unten concav gekrümmt.

Dieser entgegengesetzen Krümmung soll hinfort auch ein entgegengesetztes Vorzeichen des Spannungsmomentes $\frac{EJ}{\varrho} = M$ entsprechen, und zwar wird dasselbe positiv oder negativ gesetzt, jenachdem die elastische Linie an der bestreffenden Stelle nach Oben oder nach Unten concav gekrümmt ist. Das so algebraisch verstandene Spannungsmoment des Querschnitts X im Abstande x vom Ende A des Stabes wird mit $[X]$ bezeichnet.

X bezeichne zugleich die Resultante der äusseren Kräfte für den gleich bezeichneten Querschnitt, d. h. die algebraische Summe der äusseren Kräfte incl. des Widerstandes A, welche auf das Stück AX des Stabes wirken, und es werde auch diese Kraft X algebraisch verstanden, nämlich positiv oder negativ gesetzt, jenachdem sie aufwärts oder abwärts gerichtet ist.

Hiernach lässt sich die Gleichung

$$\frac{dM}{ds} = \pm R \text{ (cf. Nr. 42)},$$

weil absolut genommen $R = X\frac{dx}{ds}$ ist, auch so schreiben:

$$\frac{d[X]}{dx} = X,$$

und sie ist nicht nur mit Rücksicht auf die absoluten Werthe, sondern auch mit Rücksicht auf die Vorzeichen richtig, weil R die Richtung gegen den Krümmungsmittelpunkt oder die entgegengesetzte Richtung hat, jenachdem die Vorzeichen von $[X]$ und X gleich oder entgegengesetzt sind.

In derselben Weise sind nun auch die in Nr. 57 bezeichneten Widerstandskräfte A und B positiv oder negativ, jenachdem sie aufwärts oder abwärts gerichtet sind, desgl. die Spannungsmomente $[A]$ und $[B]$ positiv oder negativ, jenachdem die elastische Linie an den betreffenden Enden nach Oben oder nach Unten concav gekrümmt ist.

Was die in der vorigen Nummer noch bezeichneten Winkel α und β betrifft, so wird ihre Definition dahin ergänzt, dass α gebildet werden soll von der Richtung AB mit der gegen B hin gerichteten Tangente des Punktes A der elastischen Linie, β von der Richtung BA mit der gegen A hin gerichteten Tangente des Punktes B der elastischen Linie, und dass endlich beide Winkel α und β positiv oder negativ gesetzt werden, jenachdem sie unterhalb oder oberhalb der Geraden AB liegen.

1. Der Stab hat eine gleichförmig auf seiner ganzen Länge vertheilte und eine an einer beliebigen Stelle concentrirte Last zu tragen.

59. — Die gleichförmig vertheilte Last sei im Ganzen $= Q$, pro Längeneinheit des Stabes $= p$, also $Q = pl$. Die Kraft P greife in einem Punkte C der elastischen Linie an, dessen Abstände von den Endpunkten A und B $= a$ und b sind (Fig. 9).

Die Strecke $AC = a$ der elastischen Linie wird auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt A, dessen x-Axe AB und dessen z-Axe die Lothrechte durch A ist.

X mit den Coordinaten x, z ist ein beliebiger Punkt dieser Strecke, und es wird mit
X zugleich die resultirende Kraft, mit
$[X]$ das Spannungsmoment für den betreffenden Querschnitt bezeichnet. (Cf. Nr. 58.)

Die Strecke $BC = b$ der elastischen Linie wird auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt B, dessen y-Axe BA und dessen z-Axe die Lothrechte durch B ist.

Y mit den Coordinaten y, z ist ein beliebiger Punkt dieser Strecke, und es wird mit
Y zugleich die resultirende Kraft, mit
$[Y]$ das Spannungsmoment für den betreffenden Querschnitt bezeichnet, bezogen auf diejenigen äusseren Kräfte, welche von B bis Y den Stab angreifen.

Es sei ferner γ der spitze Winkel, unter welchem die elastische Linie im Punkte C gegen die Geraden AB geneigt ist, positiv oder negativ, jenachdem daselbst $\frac{dz}{dx}$ positiv oder negativ,

also $\frac{dz}{dy}$ negativ oder positiv ist;

δ sei die z-Coordinate dieses Punktes C.

60. — Ausser den Punkten A, B und C sind noch gewisse andere ausgezeichnete Punkte der elastischen Linie von besonderem Interesse, nämlich die relativen Bruchpunkte, die Inflexionspunkte und die Punkte grösster Durchbiegung.

Die relativen Bruchpunkte sind diejenigen, für welche in den zugehörigen Querschnitten M ein relatives Maximum, d. h. grösser als in den zunächst benachbarten Querschnitten ist. Liegt ein solcher Punkt an einer Stelle, wo nicht eine Kraft von endlicher Grösse angreift (hier also nicht in A, B oder C), so ist er charakterisirt durch $R = 0$, vorausgesetzt, dass an dieser Stelle die elastische Linie nach Oben concav gebogen ist (cf. Nr. 42). Im vorliegenden Falle kann es nur einen solchen mittleren relativen Bruchpunkt geben; liegt er in der Strecke AC, so dass er also durch $X = 0$ bestimmt ist, so sei er mit X_0 und sein Abstand von A mit x_0, liegt er aber in der Strecke BC an der durch $Y = 0$ bestimmten Stelle, so sei er mit Y_0 und sein Abstand von B mit y_0 bezeichnet. Er kann indessen auch im Punkte C liegen, wenn nämlich sowohl X für alle Punkte zwischen A und C, als Y für alle Punkte zwischen B und C positiv ist, einen positiven Werth auch des Spannungsmomentes $[C]$ vorausgesetzt.

Ausserdem sind auch die Endpunkte A und B relative Bruchpunkte, wenn daselbst der Stab nicht blos gestützt, sondern befestigt ist und wenn zudem A und $[A]$ resp. B und $[B]$ entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Inflexionspunkte, in welchen der Sinn der Krümmung der elastischen Linie sich umkehrt, und welche durch ein Maximum der Neigung der

elastischen Linie oder durch $\varrho = \infty$, also $M = 0$ charakterisirt sind, kann es hier im Allgemeinen 2 geben, entweder einen in AC, den andern in BC, oder auch beide in einer dieser beiden Strecken. Ein Inflexionspunkt in der Strecke AC, welcher sonach durch $[X] = 0$ bestimmt ist, sei mit X_1 und sein Abstand von A mit x_1, ein solcher in der Strecke BC, bestimmt durch $[Y] = 0$, sei mit Y_1 und sein Abstand von B mit y_1 bezeichnet.

Punkte grösster Durchbiegung oder grösster Abweichung von der Geraden AB, charakterisirt dadurch, dass die elastische Linie in ihnen eine horizontale Tangente hat, kann es möglicherweise 3 geben, wenn die Winkel α und β beide negativ sind. Haben α und β entgegengesetzte Zeichen, so giebt es 2 solche Punkte, einen Punkt grösster Erhebung und einen solchen grösster Senkung; sind α und β beide positiv, so giebt es nur einen Punkt grösster Senkung. Liegt ein solcher Punkt in der Strecke AC, so dass er durch $\frac{dz}{dx} = 0$ bestimmt ist, so sei er mit X' und sein Abstand von A mit x', liegt er in BC, so dass er durch $\frac{dz}{dy} = 0$ bestimmt ist, so sei er mit Y' und sein Abstand von B mit y' bezeichnet.

Der Werth einer grössten Durchbiegung, d. h. ein Maximum oder Minimum von z wird mit δ' bezeichnet.

Uebersichtlich zusammengefasst und bezogen beispielsweise auf die Strecke AC der elastischen Linie ist sonach

der höchstens einfache mittlere relative Bruchpunkt,
" " zweifache Inflexionspunkt,
" " dreifache Punkt grösster Durchbiegung

beziehungsweise charakterisirt durch:

$$X = 0;\ [X] = max.\ \text{oder}\ min.$$

$$[X] = 0;\ \frac{dz}{dx} = \quad " \quad " \quad "$$

$$\frac{dz}{dx} = 0;\ z = \quad " \quad " \quad "$$

Die Aufsuchung der Inflexionspunkte wird unterstützt durch Berücksichtigung der Vorzeichen von $[A]$, $[B]$ und $[C]$, die der Punkte grösster Durchbiegung durch Berücksichtigung der Vorzeichen von α, β und γ; entgegengesetzten Zeichen von $[A]$ und $[C]$ oder $[B]$ und $[C]$ entspricht je ein dazwischen liegender Inflexionspunkt, entgegengesetzten Zeichen von α und γ oder gleichen Zeichen von β und γ wenigstens je ein Punkt grösster Durchbiegung.

α. Der Stab ist beiderseits befestigt.

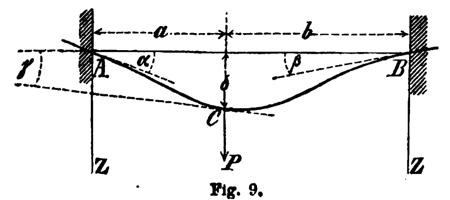


Fig. 9.

61. — Die Winkel α und β sind gegeben, die Kräfte A und B sowie die Spannungsmomente $[A]$ und $[B]$ sind vorläufig unbekannt. (Fig. 9.)

Für irgend einen Punkt X der Strecke AC der elastischen Linie

gelten die folgenden Gleichungen, welche durch successive Integration auseinander erhalten werden:

$$\left.\begin{aligned} X &= A - px \\ [X] = -EJ\frac{d^2z}{dx^2} &= [A] + Ax - \frac{px^2}{2} \\ EJ\left(\alpha - \frac{dz}{dx}\right) &= [A]x + \frac{Ax^2}{2} - \frac{px^3}{6} \\ EJ\,(x\alpha - z) &= \frac{[A]x^2}{2} + \frac{Ax^3}{6} - \frac{px^4}{24} \end{aligned}\right\} \dots\dots (A)$$

und analog für irgend einen Punkt Y der Strecke BC:

$$\left.\begin{aligned} Y &= B - py \\ [Y] = -EJ\frac{d^2z}{dy^2} &= [B] + By - \frac{py^2}{2} \\ EJ\left(\beta - \frac{dz}{dy}\right) &= [B]y + \frac{By^2}{2} - \frac{py^3}{6} \\ EJ\,(y\beta - z) &= \frac{[B]y^2}{2} + \frac{By^3}{6} - \frac{py^4}{24} \end{aligned}\right\} \dots\dots (B).$$

Vermittels dieser Gleichungen würde man für jeden Punkt der elastischen Linie resp. für jeden Querschnitt des Stabes die Resultante der äusseren Kräfte, das resultirende Moment derselben = dem Spannungsmoment, die Neigung und die Durchbiegung der elastischen Linie unmittelbar berechnen können, wenn die 4 Grössen

$$A \quad B \quad [A] \quad [B]$$

bekannt wären. Um sie zu finden, dienen die zusammengehörigen Werthe:

$$x = a; \ \frac{dz}{dx} = \gamma; \ z = \delta$$

$$\text{und } y = b; \ \frac{dz}{dy} = -\gamma; \ z = \delta,$$

welche, in die je zwei letzten Gleichungen obiger Systeme (A) und (B) eingesetzt, 4 Bestimmungsgleichungen liefern, wodurch in Verbindung mit den beiden Gleichgewichtsbedingungen des ganzen Systems der äusseren Kräfte:

$$A + B = P + p(a + b)$$

$$[A] + Aa - \frac{pa^2}{2} = [B] + Bb - \frac{pb^2}{2}$$

jene 4 Unbekannten nebst den ausserdem in den 4 ersteren Bestimmungsgleichungen vorkommenden Unbekannten γ und δ bestimmt sind. Man findet:

$$A = P\frac{(3a + b)b^2}{l^3} + \frac{Q}{2} + \frac{6EJ}{l^2}(-\alpha + \beta)$$

$$B = P\frac{a^2(a + 3b)}{l^3} + \frac{Q}{2} + \frac{6EJ}{l^2}(\alpha - \beta)$$

$$[A] = -P\frac{ab^2}{l^2} - \frac{Ql}{12} + \frac{2EJ}{l}(2\alpha - \beta)$$

$$[B] = -P\frac{a^2b}{l^2} - \frac{Ql}{12} + \frac{2EJ}{l}(-\alpha + 2\beta)$$

$$EJ.tg\,\gamma = P\frac{a^2b^2(-a+b)}{2l^3} + p\frac{ab(-a+b)}{12} + $$
$$+ \frac{EJ}{l^2}\Big[(-2ab+b^2)\,\alpha + (-a^2+2ab)\,\beta\Big]$$
$$EJ\,\delta = P\frac{a^3b^3}{3l^3} + p\frac{a^2b^2}{24} + \frac{EJab}{l^2}(b\alpha + a\beta).$$

Unter Anderem ergiebt sich hiermit

aus der zweiten der Gleichungen (A) für $x = a$

oder „ „ „ „ „ (B) „ $y = b$:

$$[C] = P\frac{2a^2b^2}{l^3} + \frac{p}{12}(-a^2+4ab-b^2) + \frac{2EJ}{l^2}\Big[(-a+2b)\,\alpha + (2a-b)\,\beta\Big].$$

Die Momente $[A]$, $[B]$ und $[C]$ stehen in der folgenden von α und β unabhängigen Beziehung zu einander:

$$l[C] - b[A] - a[B] = \left(P + \frac{Q}{2}\right)ab,$$

welche entweder durch Elimination von α und β zwischen den Gleichungen für diese drei Momente, oder einfacher durch Combination der beiden Gleichungen

$[C] = [A] + Aa - \frac{pa^2}{2}$ und $[C] = [B] + Bb - \frac{pb^2}{2}$ gefunden wird.

62. — Die Lage des mittleren Bruchpunktes und das zugehörige relativ grösste Spannungsmoment sind in der Strecke AC bestimmt durch:

$$x_0 = \frac{A}{p};\ [X_0] = [A] + \frac{A^2}{2p},$$

wenn $0 < x_0 < a$ und $[X_0]$ positiv ist; dagegen in der Strecke BC durch:

$$y_0 = \frac{B}{p};\ [Y_0] = [B] + \frac{B^2}{2p},$$

wenn $0 < y_0 < b$ und $[Y_0]$ positiv ist. Ist Beides nicht der Fall, so liegt der mittlere Bruchpunkt in C, falls $[C]$ positiv ist, widrigenfalls er ganz fehlen, d. h. nur A und B oder auch nur einer dieser beiden Punkte relativer (letzteren Falls absoluter) Bruchpunkt sein würde.

Die Inflexionspunkte sind in der Strecke AC durch die zwischen 0 und a liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$[A] + Ax_1 - \frac{px_1^2}{2} = 0,$$

in der Strecke BC durch die zwischen 0 und b liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$[B] + By_1 - \frac{py_1^2}{2} = 0$$

bestimmt; mit $x_0 = \frac{A}{p}$ und $y_0 = \frac{B}{p}$ folgt aus denselben auch:

$$x_1 = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 2\frac{[A]}{p}}$$
$$y_1 = y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + 2\frac{[B]}{p}}.$$

Die Punkte grösster Durchbiegung sind in der Strecke AC durch die zwischen 0 und a liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$EJ\alpha = [A]\,x' + \frac{Ax'^2}{2} - \frac{px'^3}{6},$$

in der Strecke BC durch die zwischen 0 und b liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$EJ\beta = [B]\,y' + \frac{By'^2}{2} - \frac{py'^3}{6}$$

bestimmt. Die entsprechenden grössten Durchbiegungen δ' selbst werden durch Einsetzung der gefundenen Wurzelwerthe x' und y' für x resp. y in den letzten der Gleichungen (A) und (B), Nr. 61, gefunden, welche aber mit Rücksicht auf obige Bestimmungsgleichungen von x' und y' sich reduciren auf:

$$EJ\delta' = x'^2\left(\frac{[A]}{2} + \frac{Ax'}{3} - \frac{px'^2}{8}\right)$$

$$\text{und } EJ\delta' = y'^2\left(\frac{[B]}{2} + \frac{By'}{3} - \frac{py'^2}{8}\right).$$

BESONDERE FÄLLE.

63. — Es sei: $\alpha = \beta = 0$, d. h. der Stab beiderseits so befestigt, dass die elastische Linie genöthigt ist, sich bei A und B tangential an die Gerade AB anzuschliessen. Dieser Fall findet gewöhnlich mit genügender Näherung statt bei einem Balken, der mit beiden Enden eingemauert ist, oder bei einem stabförmigen Körper, dessen Enden mit festen und festliegenden Körpern zusammengegossen, verschraubt oder anderweitig fest verbunden sind.

Es sei ferner vorläufig $Q = 0$, d. h. der Stab AB habe nur die bei C concentrirte Last P zu tragen, eine Voraussetzung, welche die bei nicht sehr grosser Länge in der That meist ohne wesentlichen Fehler zulässige Vernachlässigung des Eigengewichts des Stabes in sich schliesst.

Aus den Formeln sub Nr. 61 und 62 ergiebt sich dann:

$$A = P\frac{(3a+b)\,b^2}{l^3};\quad B = P\frac{a^2\,(a+3b)}{l^3}$$

$$[A] = -P\frac{ab^2}{l^2};\ [B] = -P\frac{a^2b}{l^2};\ [C] = P\frac{2a^2b^2}{l^3}.$$

A, B und C sind relative Bruchpunkte, und die 3 relativ grössten Spannungsmomente, absolut genommen, verhalten sich:

$$-[A] : [C] : -[B] = \frac{1}{2a} : \frac{1}{l} : \frac{1}{2b};$$

sie folgen so nach abnehmender Grösse, wenn $a \lesseqgtr b$ vorausgesetzt wird.

Die Inflexionspunkte liegen je einer in jeder der beiden Strecken AC und BC; ihre Lagen sind bestimmt durch:

$$x_1 = \frac{-[A]}{A} = \frac{a}{3a+b}\,l$$

$$y_1 = \frac{-[B]}{B} = \frac{b}{a+3b}\,l.$$

Für den Angriffspunkt C der Kraft P ist:

$$\gamma = \frac{P}{EJ}\,\frac{a^2 b^2 (b-a)}{2 l^3};\ \delta = \frac{P}{EJ}\,\frac{a^3 b^3}{3 l^3}.$$

Abgesehen von den Endpunkten A und B, welche nach der Voraussetzung den analytischen Charakter $\frac{dz}{dx} = 0$ resp. $\frac{dz}{dy} = 0$ von Punkten grösster Durchbiegung haben, giebt es nur einen solchen Punkt, welcher ein Punkt grösster Senkung ist. Wegen des mit $a < b$ positiven Werthes von γ liegt derselbe in der Strecke BC im Abstande

$$y' = 2\frac{-[B]}{B} = 2y_1 = \frac{2b}{a+3b}\,l$$

von B; die entsprechende grösste Senkung selbst ist:

$$\delta' = \frac{B}{EJ}\,\frac{y'^3}{12} = \frac{P}{EJ}\,\frac{2a^2b^3}{3(a+3b)^2}.$$

Dieselbe ist um so mehr $> \delta$, jemehr a und b verschieden sind; z. B.

für $\frac{b}{a}$ =	1	2	3	4	5	...
ist $\frac{\delta'}{\delta}$ =	1	1,10	1,28	1,48	1,69	...

64. — Ist bei dem Falle sub Nr. 63 insbesondere $a = b$, so wird:

$$A = B = \frac{P}{2}$$

$$-[A] = -[B] = [C] = \frac{Pl}{8}$$

$$x_1 = y_1 = \frac{l}{4}$$

$$\delta = \frac{P}{EJ}\,\frac{l^3}{4.48} = \delta'.$$

65. — Es sei $\alpha = \beta = 0$ und $a = b$, aber nicht $Q = 0$, d. h. der beiderseits genau nach der Richtung AB befestigte Stab habe zugleich **eine gleichförmig auf seiner Länge l vertheilte Last Q und eine in der Mitte concentrirte Last P** zu tragen. In diesem Falle ist:

$$A = B = \frac{P+Q}{2}$$

$$[A] = [B] = -\left(P + \frac{2}{3}Q\right)\frac{l}{8}$$

$$[C] = \left(P + \frac{1}{3}Q\right)\frac{l}{8};$$

ferner mit $\frac{P}{Q} = q$:

$$x_1 = y_1 = \left(q + 1 - \sqrt{q^2 + q + \frac{1}{3}}\right)\frac{l}{2}$$

$$\delta = \frac{\left(P + \frac{1}{2}Q\right)}{EJ}\,\frac{l^3}{4.48} = \delta'.$$

66. — Ist bei dem Falle sub Nr. 65 insbesondere $P = 0$, d. h. ist der Stab nur mit der gleichförmig vertheilten Last Q beschwert, so wird:

$$A = B = \frac{Q}{2}$$

$$[A] = [B] = -\frac{Ql}{12};\ [C] = \frac{Ql}{24}$$

$$x_1 = y_1 = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\frac{l}{2} = 0{,}423\ \frac{l}{2}$$

$$\delta = \frac{Q}{EJ}\,\frac{l^3}{8.48} = \delta'.$$

67. — Der beiderseits befestigte Stab AB würde die grösstmögliche Tragfähigkeit erhalten, deren er bei gegebenem constanten Werthe von J und gegebener Belastung durch die Kräfte P und Q überhaupt fähig ist, wenn die bisher als gegeben vorausgesetzten Winkel α und β so bestimmt würden, dass jedes der 3 relativ grössten Spannungsmomente zu dem Widerstandsmomente für den betreffenden Sinn der Biegung (cf. Nr. 50) dasselbe Verhältniss hätte. Die betreffenden 3 Querschnitte bei A, B und an einer mittleren Stelle X_0, Y_0 oder C wären dann gleichwerthige Bruchquerschnitte, d. h. es würde in ihnen gleichzeitig die Spannung σ' oder Pressung σ'' den höchstens zulässigen Werth k' resp. k'' erreichen.

Mit Rücksicht auf die Bezeichnungen in Nr. 50 sind also α und β so zu bestimmen, dass

$$-[A] = -[B] = max.\,M''$$

$$\text{und } \frac{max.\,M'}{W'} = \frac{max.\,M''}{W''}$$

ist, wo je nach Umständen

$$max.\,M' = [X_0] \text{ oder } [Y_0] \text{ oder } [C]$$

sein kann. Die erstere Bedingung: $[A] = [B]$ liefert mit Rücksicht auf die allgemeinen Ausdrücke dieser beiden Spannungsmomente sub Nr. 61:

$$\alpha - \beta = \frac{P}{EJ}\,\frac{ab\,(b-a)}{6l},$$

womit u. A. die allgemeinen Ausdrücke von A und B übergehen in:

$$A = P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2};\ B = P\frac{a}{l} + \frac{Q}{2}$$

d. h. es sind dann diese Widerstandskräfte eben so gross, wie sie nach dem Hebelgesetze sein würden, wenn der Stab beiderseits einfach gestützt, mithin $[A] = [B] = 0$ wäre.

Was die noch nöthige zweite Bestimmungsgleichung für α und β betrifft, so möge insbesondere $W' = W''$ vorausgesetzt werden, was nach Nr. 50 dann der Fall ist, wenn $k' = k''$ oder $e' = e''$ ist, oder wenn der Querschnitt bei den Inflexionspunkten seine Lage gegen die Biegungsaxe umkehrt. Die zweite Bedingung ist dann:

$$max.\,M' = max.\,M''\ (= -[A] = -[B])$$

und es sind die beiden Fälle zu unterscheiden, ob das Maximum von M' im Querschnitte C oder ausserhalb desselben stattfindet.

Ist $a \leqq b$, so ist

$$x_0 = \frac{A}{p} = \frac{A}{Q} l = \frac{P}{Q} b + \frac{l}{2} > a$$

$$y_0 = \frac{B}{p} = \frac{B}{Q} l = \frac{P}{Q} a + \frac{l}{2} \gtreqless b$$

$$\text{jenachdem } \frac{P}{Q} \gtrless \frac{m}{a}$$

ist, unter $m = b - \frac{l}{2}$ die Entfernung des Angriffspunktes C vom Mittelpunkte des Stabes verstanden. Ist also

$$1) \ \frac{P}{Q} \geqq \frac{m}{a}, \text{ so ist } max. M' = [C]$$

und die Bedingung: $-[A] = -[B] = [C]$ liefert:

$$\left. \begin{matrix} EJ\alpha \\ EJ\beta \end{matrix} \right\} = \pm P \frac{ab\,(b-a)}{12l} + Q \frac{a^2 - ab + b^2}{24},$$

während aus der allgemeinen Relation zwischen den 3 Spannungsmomenten bei A, B und C (Nr. 61) sich ergiebt:

$$-[A] = -[B] = [C] = \left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{ab}{2l} = max. M.$$

Ist aber $2) \ \frac{P}{Q} < \frac{m}{a}$, so ist $max. M' = [Y_0]$

und die Bedingung: $-[A] = -[B] = [Y_0]$ liefert:

$$\left. \begin{matrix} EJ\alpha \\ EJ\beta \end{matrix} \right\} = \pm P \frac{ab\,(b-a)}{12l} + P \frac{a\,(b-a)}{8} + Q \frac{l^2}{96} - \frac{P^2}{Q} \frac{a^2}{8}$$

$$-[A] = -[B] = [Y_0] = \frac{B^2}{4p} = max. M.$$

68. — Ist z. B. der Stab nur durch die Kraft P belastet, so ist mit $Q = 0$ jedenfalls $\frac{P}{Q} > \frac{m}{a}$; die grösstmögliche Tragfähigkeit findet also statt für

$$\alpha = \frac{P}{EJ} \frac{ab\,(b-a)}{12l} = -\beta$$

und zwar ist $max. M = P \frac{ab}{2l}$

$= \frac{l}{2b} \cdot max. M$ für $\alpha = \beta = 0$ (Nr. 63), so dass, wenn P sehr nahe am Ende A angreift, durch die vortheilhaftesten Richtungswinkel α und β die Tragfähigkeit fast auf das Doppelte derjenigen für $\alpha = \beta = 0$ gesteigert werden kann.

Ist aber hierbei $a = b$ (Nr. 64), so sind $\alpha = \beta = 0$ die vortheilhaftesten Richtungswinkel der beiderseitigen Befestigungen des Stabes.

Ist, während $a = b$ ist, nicht $Q = 0$ (Nr. 65), so ist doch noch $\frac{P}{Q} \geqq \frac{m}{a}$; das Maximum der Tragfähigkeit findet also statt bei:

$$\alpha = \beta = \frac{Q}{EJ}\frac{l^2}{96}$$

und zwar ist $max. M = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{l}{8}$, insbesondere für $P = 0$ (Nr. 66):

$$max.\ M = \frac{Ql}{16} = \frac{3}{4}.\ max.\ M \text{ für } \alpha = \beta = 0.$$

In diesem letzteren Falle kann zwar m jeder beliebige Werth, also auch $\frac{P}{Q} = 0 < \frac{m}{a}$ sein; indessen ergeben sich mit den hierfür geltenden Formeln sub Nr. 67 dieselben Werthe von α, β und $max. M$.

69. — Arme von Transmissionsrädern (Zahnrädern, Riemenrollen etc.), überhaupt von Rädern, in deren Peripherie (Theilkreis) eine Kraft P wirkt, welche den Radkranz gegen die Nabe zu verdrehen strebt und dadurch die beide Theile fest verbindenden Arme auf Biegungs-Festigkeit in Anspruch nimmt. — Es sei (Fig. 10):

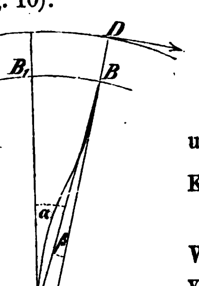


Fig. 10.

$CA = a$ der Radius der Nabe,
$CD = r$ „ „ des Theilkreises,
$AB_1 = l$ die Länge eines Arms,
z die Anzahl der Arme,

und es werde angenommen, dass jeder Arm durch dieselbe Kraft $= \frac{P}{z}$ gebogen wird.

Ist AB_1 die ursprüngliche Axe eines Arms und γ der Winkel B_1CB, um welchen der Radkranz gegen die Nabe verdreht wird, so wird dadurch der Arm so gebogen, dass seine elastische Linie den Radius CB_1 bei A und den Radius CB bei B berührt, und er ist mithin als ein stabförmiger Körper zu betrachten, welcher

bei A unter dem Winkel $-\alpha = -BAB_1$
„ B „ „ „ $\beta = ABC$

gegen die Gerade AB geneigt befestigt ist. Die 3 Winkel α, β, γ sind sehr klein, und wegen

$$\alpha = \beta + \gamma;\ \frac{\gamma}{\beta} = \frac{l}{a} \text{ ist: } \alpha = \frac{l+a}{a}\beta.$$

Wird also vorläufig ein constanter Querschnitt des Arms vorausgesetzt, so liefern die allgemeinen Ausdrücke von $[A]$ und $[B]$ sub Nr. 61 mit

$$P = 0;\ Q = 0;\ \alpha = -\frac{l+a}{a}\beta$$

zwei Gleichungen, aus denen sich durch Elimination von β ergiebt:

$$\frac{[B]}{-[A]} = \frac{l+3a}{2l+3a}.$$

Hieraus und aus der Momentengleichung für den Querschnitt bei A:

$$-[A] = \frac{P}{z}(r-a) - [B] \text{ folgt: } -[A] = \frac{P(r-a)}{z}\frac{2l+3a}{3l+6a}.$$

Dieses Spannungsmoment ist das grösste, welches in irgend einem Querschnitte des Arms stattfindet, und aus seiner Gleichsetzung mit

$$k\frac{J}{e} = k\frac{bh^2}{6} = k\frac{mh^3}{6},$$

unter h die in der Radebene,

$b = mh$ die nach der Richtung der Axe gemessene Dimension des rechteckigen Querschnitts verstanden, ergiebt sich:

$$h = \sqrt[3]{\frac{P(r-a)}{zkm}\,\frac{4l+6a}{l+2a}}.$$

Weil aber das Spannungsmoment bei B absolut genommen kleiner ist, als bei A, so darf schliesslich der Arm von A gegen B etwas verjüngt, nämlich die Dimension h bis h_1 verkleinert werden, und zwar bei constanter Dimension b im Verhältnisse:

$$\frac{h_1}{h} = \sqrt{\frac{[B]}{-[A]}} = \sqrt{\frac{l+3a}{2l+3a}}.$$

Freilich ist dieses Verjüngungsverhältniss sowohl, wie auch, falls es ausgeführt wird, die obige Formel für h nur angenähert richtig, weil die benutzten Formeln sub Nr. 61 auf der Voraussetzung eines constanten Querschnitts beruhen. Auch ist von den Seitenrippen abgesehen worden, welche den Armen gewöhnlich gegeben werden.

Bei übrigens gegebenen Verhältnissen fällt h um so grösser und $\frac{h_1}{h}$ um so kleiner aus, je kleiner a ist. Wird durchschnittlich

$$a = \frac{l}{3} = \frac{a+l}{4} = \frac{r}{4^2/_3}$$

gesetzt, so wird: $\frac{h_1}{h} = 0{,}82$

und sollte also eine stärkere Verjüngung, als auf $h_1 = \frac{4}{5}h$ im Allgemeinen nicht ausgeführt werden; ferner wird:

$$h = \sqrt[3]{\frac{99}{35mk}\,\frac{Pr}{z}}$$

oder mit $m = {}^1/_5$ als Durchschnittswerth für gusseiserne Räder:

$$h = \sqrt[3]{\frac{99}{7k}\,\frac{Pr}{z}}.$$

Der Coefficient k wird hier verhältnissmässig klein genommen, weil abgesehen davon, dass nicht immer auf eine gleichmässige Theilung des ganzen Theilrissdrucks P unter alle z Arme gerechnet werden kann, die Letzteren auch genügende Masse besitzen müssen, um bei Stössen ohne Gefahr eine beträchtliche lebendige Kraft zu ihrer Deformation verwenden zu können; im Mittel kann etwa genommen werden:

$$h = 0{,}6\sqrt[3]{\frac{Pr}{z}}, \text{ entsprechend } k = 65^1/_2.^{*)}$$

---

*) Setzt man nach Redtenbacher:

$$\frac{h}{d} = \frac{1{,}7}{\sqrt[3]{z}},$$

70. — Als ein anderes Beispiel der Benutzung der hier in Rede stehenden allgemeinen Formeln zur Lösung scheinbar fremdartiger oder zusammengesetzter Aufgaben sei es gefordert, einen gleichförmig schweren Stab ST von der Länge l in zwei so gewählten Punkten A und B zu unterstützen, dass dadurch gewisse Bedingungen erfüllt werden, dass z. B. die 3 relativ grössten Spannungsmomente in den Querschnitten bei A, B und an einer gewissen mittleren Stelle C zwischen A und B gleich gross werden, oder dass die 3 relativ grössten Senkungen der elastischen Linie an den überhangenden freien Enden S und T des Stabes und an einer mittleren Stelle C gleich gross ausfallen etc.

In den beiden genannten Fällen müssen offenbar die Stützpunkte A und B symmetrisch gegen den Mittelpunkt des Stabes liegen, welcher seinerseits mit C zusammenfällt; sind dann

$AS = BT = x$ die Längen der überhangenden äusseren Theile des Stabes,
α die Winkel, unter welchen die elastische Linie bei A und B gegen die Horizontale AB geneigt ist,

so lässt sich zunächst α als Function von $x = f(x)$ finden, indem man das Spannungsmoment im Querschnitte A einmal nach Nr. 54 durch x, dann nach Nr. 61 durch α und x ausdrückt und beide Ausdrücke gleich setzt.

Setzt man nun der Forderung entsprechend, dass die Spannungsmomente bei A, B und C einander gleich sein sollen, das nach Nr. 54 durch x ausgedrückte Spannungsmoment bei A = dem nach Nr. 61 durch α und x ausgedrückten Spannungsmomente bei C, so findet man mit $\alpha = f(x)$:

$$x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} l = 0{,}207\, l.$$

Der anderen Forderung entsprechend, dass die Senkungen der Punkte S, T und C unter die Horizontale AB einander gleich sein sollen, kann man nach Nr. 54 die Senkung des Punktes S unter die Tangente des Punktes A der elastischen Linie durch x, also unter AB durch α und x ausdrücken, desgl. auch die Senkung des Punktes C nach Nr. 61, und die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert mit $\alpha = f(x)$ eine cubische Gleichnug, woraus

$$x = 0{,}223\ldots l = \text{nahe } \frac{2}{9} l$$

folgt, ein Resultat, wovon z. B. Behufs zweckmässiger Unterstützung langer Massstäbe Gebrauch gemacht werden kann.

---

unter d den Durchmesser der Welle verstanden, welcher (N Zahl der übertragenen Pferdestärken, n Umdrehungszahl pro Minute) hierbei nach der Formel

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 16 \sqrt[3]{\frac{Pr}{71620}}$$

berechnet vorausgesetzt ist, so wäre:

$$h = 1{,}7 \,.\, 16 \sqrt[3]{\frac{Pr}{71620 z}} = \sqrt[3]{\frac{Pr}{3{,}56 z}},$$

also gar k nur $= \frac{99 \,.\, 3{,}56}{7} = 50^1/_3$.

β. Der Stab ist einerseits befestigt, anderseits unterstützt.

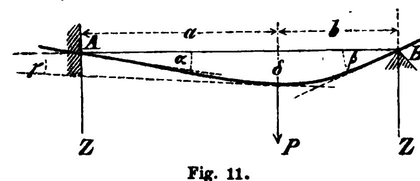


Fig. 11.

71. — Bei A sei der Stab befestigt, bei B unterstützt (Fig. 11). Das Spannungsmoment $[B]$ ist jetzt $= 0$, der Winkel β nicht gegeben. Man findet aber β, indem man den allgemeinen Ausdruck von $[B]$ sub Nr. 61 $= 0$ setzt, und indem man dann diesen Ausdruck von β in den übrigen Formeln von Nr. 61 substituirt, ergiebt sich:

$$EJ\beta = P\frac{a^2 b}{4l} + \frac{Ql^2}{48} + \frac{EJ\alpha}{2}$$

$$A = P\frac{(3a^2 + 6ab + 2b^2)b}{2l^3} + \frac{5}{8}Q - \frac{3EJ\alpha}{l^2}$$

$$B = P\frac{a^2(2a + 3b)}{2l^3} + \frac{3}{8}Q + \frac{3EJ\alpha}{l^2}$$

$$[A] = -P\frac{ab(a + 2b)}{2l^2} - \frac{Ql}{8} + \frac{3EJ\alpha}{l}$$

$$[C] = P\frac{a^2 b\,(2a + 3b)}{2l^3} + Q\frac{(3a-b)b}{8l} + \frac{3EJb\alpha}{l^2}$$

$$l[C] = b[A] = \left(P + \frac{Q}{2}\right)ab$$

$$EJ\gamma = P\frac{a^2 b\,(2b^2-a^2)}{4l^3} + p\frac{a\,(-a^2-3ab + 6b^2)}{48} +$$

$$+ \frac{-a^2-2ab + 2b^2}{2l^2}EJ\alpha$$

$$EJ\delta = P\frac{a^3 b^2\,(3a + 4b)}{12l^3} + p\frac{a^2 b\,(a + 3b)}{48} + \frac{ab\,(a + 2b)}{2l^2}EJ\alpha.$$

Vermittels der hiernach bekannten Werthe von

A, B, $[A]$ und β

und der in Nr. 61 mit (A) und (B) bezeichneten zwei Systeme von Gleichungen, worin nur die Glieder mit $[B]$ verschwinden, kann man nun für jeden Punkt der elastischen Linie resp. für jeden Querschnitt des Stabes die Resultante der äusseren Kräfte, das resultirende Moment derselben = dem Spannungsmomente, die Neigung und die Durchbiegung der elastischen Linie unmittelbar berechnen.

72. — Im Allgemeinen giebt es 2 relative Bruchpunkte: A und einen zweiten, dessen Lage nebst dem zugehörigen relativ grössten Spannungsmomente in der Strecke AC bestimmt sind durch:

$$x_0 = \frac{A}{p};\ [X_0] = [A] + \frac{A^2}{2p},$$

wenn $0 < x_0 < a$ und $[X_0]$ positiv ist; dagegen in der Strecke BC durch:

$$y_0 = \frac{B}{p};\ [Y_0] = \frac{B^2}{2p},$$

wenn $0 < y_0 < b$ ist. Ist Beides nicht der Fall, so liegt dieser mittlere Bruchpunkt in C, falls $[C]$ positiv ist, widrigenfalls A der einzige oder absolute Bruchpunkt wäre.

Der höchstens einzige Inflexionspunkt ist in der Strecke AC durch die zwischen 0 und a liegende Wurzel der Gleichung:

$$[A] + Ax_1 - \frac{px_1^2}{2} = 0 \text{ oder } x_1 = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 2\frac{[A]}{p}}$$

bestimmt, in der Strecke BC dagegen durch:

$$y_1 = 2\frac{B}{p} = 2y_0.$$

Die höchstens 2 Punkte grösster Durchbiegung sind in AC durch die zwischen 0 und a liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$EJ\alpha = [A]x' + \frac{Ax'^2}{2} - \frac{px'^3}{6},$$

in BC durch die zwischen 0 und b liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$EJ\beta = \frac{By'^2}{2} - \frac{py'^3}{6}$$

bestimmt. Die entsprechenden grössten Durchbiegungen δ' sind:

$$EJ\delta' = x'^2\left(\frac{[A]}{2} + \frac{Ax'}{3} - \frac{px'^2}{8}\right)$$

$$\text{und } EJ\delta' = y'^3\left(\frac{B}{3} - \frac{py'}{8}\right).$$

BESONDERE FÄLLE.

73. — Es sei $\alpha = 0$, d. h. der Stab bei A so befestigt, dass die elastische Linie daselbst die Gerade AB berührt. Auch sei vorläufig $Q = 0$, d. h. der Stab habe nur die bei C concentrirte Last P zu tragen, welche Voraussetzung die Vernachlässigung des Eigengewichts des Stabes in sich schliesst.

Aus den Formeln sub Nr. 71 und 72 ergiebt sich dann:

$$A = P\frac{(3a^2 + 6ab + 2b^2)b}{2l^3}; \quad B = P\frac{a^2(2a + 3b)}{2l^3}$$

$$[A] = -P\frac{ab(a + 2b)}{2l^2}; \quad [C] = P\frac{a^2b(2a+3b)}{2l^3}.$$

$[A]$ und $[C]$ sind relativ grösste Spannungsmomente, und das Verhältniss ihrer Absolutwerthe:

$$\frac{-[A]}{[C]} = \frac{l(a + 2b)}{a(2a + 3b)} \text{ ist} \gtreqless 1, \text{ jenachdem } \frac{b}{a} \gtreqless \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ist. Der Inflexionspunkt liegt zwischen A und C in der Entfernung von A:

$$x_1 = \frac{-[A]}{A} = \frac{a(a + 2b)}{3a^2 + 6ab + 2b^2}l.$$

Ferner ist $\beta = \dfrac{P}{EJ}\dfrac{a^2b}{4l}$

und für den Punkt C:

$$\gamma = \frac{2b^2 - a^2}{l^2}\beta; \quad \delta = \frac{P}{EJ}\frac{a^3 b^2 (3a + 4b)}{12 l^3}.$$

Jenachdem $\frac{b}{a} \gtrless \sqrt{\frac{1}{2}}$, also γ positiv oder negativ ist, findet die grösste Durchbiegung (Senkung) zwischen B und C oder zwischen A und C statt; im ersten Falle ist sie bestimmt durch:

$$y' = \sqrt{\frac{2EJ tg\beta}{B}} = l\sqrt{\frac{b}{2a+3b}}; \quad \delta' = \frac{B}{EJ}\frac{y'^3}{3},$$

im zweiten Falle durch:

$$x' = 2\frac{-[A]}{A} = 2x_1; \quad \delta' = \frac{A}{EJ}\frac{x'^3}{12}.$$

74. — Hat der Stab nur die gleichförmig vertheilte Last Q zu tragen, so ist nach den Formeln sub Nr. 71 und 72:

$$A = \frac{5}{8}Q; \quad B = \frac{3}{8}Q; \quad [A] = -\frac{Ql}{8}.$$

Der mittlere relative Bruchpunkt liegt im Abstande

$$y_0 = \frac{3}{8}l$$

von der Stütze B, und das entsprechende Spannungsmoment ist:

$$[Y_0] = \frac{9}{16}\frac{Ql}{8} = -\frac{9}{16}[A].$$

Der Inflexionspunkt liegt im Abstande

$$y_1 = 2y_0 = \frac{3}{4}l$$

von der Stütze B, woselbst $\beta = \frac{Q}{EJ}\frac{l^2}{48}$ ist.

Die grösste Durchbiegung findet statt in der Entfernung

$$y' = \frac{2}{-1+\sqrt{33}}l = 0{,}422\,l$$

von B, und zwar ist:

$$\delta' = 1{,}040\frac{Q}{EJ}\frac{l^3}{4.48} = 1{,}04\,\delta,$$

unter δ die Durchbiegung in der Mitte des Stabes verstanden, wo $\gamma = \frac{1}{4}\beta$ ist.

75. — Der bei A befestigte, bei B unterstützte Stab erhält die grösstmögliche Tragfähigkeit, deren er bei gegebenem constantem Werthe von J und gegebener Belastung durch die Kräfte P und Q fähig ist, wenn der Winkel α so gewählt wird, dass die beiden relativ grössten Spannungsmomente $max.\ M'$ und — $[A]$ zu den betreffenden Widerstandsmomenten W' und W'' (cf. Nr. 50) dasselbe Verhältniss haben, dass also

$$\frac{max.\ M'}{W'} = \frac{-[A]}{W''}$$

ist, wo je nach Umständen

$$max.\ M' = [X_0] \text{ oder } [Y_0] \text{ oder } [C]$$

sein kann; in den beiden ersten dieser 3 Fälle ist die Bestimmungsgleichung von α quadratisch, im dritten Falle linear. Ist es nicht a priori gewiss, welcher von ihnen stattfindet, so kann man in dieser Beziehung vorläufig eine den Umständen entsprechende wahrscheinliche Annahme machen, ihr gemäss α, damit A und B, x_0 und y_0 berechnen und so die Richtigkeit der Annahme nach Nr. 72 controliren.

Mit $W' = W''$ wird die Bestimmungsgleichung von α:

$$max.\ M' = -[A];$$

wird dann in einem zweifelhaften Falle der mittlere Bruchquerschnitt vorläufig in C angenommen, so ergiebt sich vermittels der Ausdrücke von $[A]$, $[C]$, A und B sub Nr. 71:

$$EJ\,\alpha = P\frac{ab\,(2b^2 - a^2)}{6l\,(a+2b)} + Q\frac{l\,(a^2 - ab + 2b^2)}{(24\,(a+2b)}$$

$$A = P\frac{2b}{a+2b} + Q\frac{a^2 + 4ab + 2b^2}{2l\,(a+2b)}$$

$$B = P\frac{a}{a+2b} + Q\frac{a^2 + 2ab + 2b^2}{2l\,(a+2b)}$$

und es ist nun die Annahme bestätigt, also obiger Werth von α der der Aufgabe entsprechende, wenn

$$x_0 = \frac{A}{p} > a, \text{ d. h. } \frac{P}{Q} > \frac{a^2 - 2b^2}{4bl}$$

$$\text{und } y_0 = \frac{B}{p} > b, \text{ d. h. } \frac{P}{Q} > \frac{2b^2 - a^2}{2al}$$

oder auch $\frac{P}{Q}$ dem grösseren dieser beiden Quotienten gleich ist. Es liesse sich aber der mittlere Bruchquerschnitt

in AC vermuthen, wenn $x_0 < a$ und $y_0 > b$, dagegen
„ BC „ „ $x_0 > a$ „ $y_0 < b$ sich herausstellen

sollte.

Ist α der Gleichung: $[C] = -[A]$ gemäss berechnet, so ist

$$max.\ M = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{ab}{a+2b},$$

widrigenfalls $max.\ M = -[A]$ durch Einsetzung des anderweitig gefundenen Werthes von α in den allgemeinen Ausdruck von $[A]$ gefunden wird.

76. — Ist z. B. $Q = 0$, so ist jedenfalls C der mittlere Bruchpunkt, also der Neigungswinkel der vortheilhaftesten Befestigungsrichtung gegen die Gerade AB bestimmt durch:

$$\alpha = \frac{P}{EJ}\frac{ab\,(2b^2 - a^2)}{6l\,(a+2b)}$$

und zwar wird dadurch $max.\ M = P\frac{ab}{a+2b}$.

Ist $P = 0$, so kann nach Belieben X_0 oder Y_0 als der mittlere Bruchpunkt betrachtet werden; letzteren Falls giebt die Bedingung:

$$-[A] = [Y_0] = \frac{B^2}{2p}$$

mit Rücksicht auf die Ausdrücke von $[A]$ und B sub Nr. 71:

$$\alpha = \frac{Q}{EJ}\left(-\frac{11}{8} + \sqrt{2}\right)\frac{l^2}{3} = 0{,}0131\,\frac{Ql^2}{EJ}$$

und damit $max.\,M = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) Ql = 0{,}0858\,Ql$

$= \frac{1}{1{,}457}\,max.\,M$ für $\alpha = 0$, so dass also die Tragfähigkeit des gleichförmig belasteten Stabes durch die vortheilhafteste Befestigungsrichtung am Ende A auf das 1,457fache derjenigen bei horizontaler Befestigungsrichtung erhöht wird.

77. — Ein an beiden Enden unterstützter, gleichförmig auf seiner ganzen Länge $AB = l = 2a$ mit der Last Q (incl. Eigengewicht G) zu belastender Balken soll in seiner Mitte noch durch eine dritte Stütze C unterstützt werden; es fragt sich, um welchen Betrag $= x$ dieser mittlere Stützpunkt unter der Horizontalen AB liegen müsse, damit die grösste Spannung oder Pressung, welche in irgend einem Punkte des belasteten Balkens eintritt, unter übrigens gegebenen Umständen ein Minimum sei?

Die Hälfte AC des Balkens lässt sich als bei C befestigt, bei A unterstützt betrachten, und da die elastische Linie bei C eine horizontale Tangente hat, so ist letztere unter dem Winkel $\alpha = \frac{x}{a}$ gegen AC geneigt. Nach der vorigen Nr. muss deshalb

$$x = a\,\alpha = \frac{0{,}0131}{2}\,\frac{Qa^3}{EJ}$$

gemacht werden. Anstatt diesen kleinen Betrag abzumessen, kann man den vorläufig nur bei A und B aufliegenden Balken durch ein solches Gewicht P in der Mitte belasten, dass in Folge der Biegung seine Unterfläche gerade die erforderliche Oberfläche der Mittelstütze erreicht; die Bedingung dafür ist (cf. Nr. 81):

$$\frac{P + \frac{5}{8}G}{EJ}\,\frac{(2a)^3}{48} = \frac{0{,}0131}{2}\,\frac{Qa^3}{EJ}$$

und liefert:

$$P = 0{,}0393\,Q - \frac{5}{8}G.$$

Soll dasselbe durch eine gleichförmig vertheilte Last Q_1 erzielt werden, so muss

$$Q_1 = \frac{8}{5}P = 0{,}0629\,Q - G$$

sein.

γ. Der Stab ist beiderseits unterstützt.

(Fig. 12.)

78. — Die Spannungsmomente $[A]$ und $[B]$ in den Endquerschnitten des Stabes über den Stützen sind jetzt beide $= 0$, die Winkel α und β aber nicht gegeben.

Wegen $[A] = [B]$ ist zunächst ebenso wie bei dem beiderseits nach der vortheilhaftesten Richtung befestigten Stabe (Nr. 67):

$$\alpha - \beta = \frac{P}{EJ} \frac{ab(b-a)}{6l}$$

und, wie hier auch aus dem Hebelgesetze folgt:

$$A = P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2};\ B = P\frac{a}{l} + \frac{Q}{2};$$

ferner mit Rücksicht auf die allgemeinen Ausdrücke von $[A]$ und $[B]$ sub Nr. 61:

$$EJ\alpha = P\frac{ab(a+2b)}{6l} + \frac{Ql^2}{24}$$

$$EJ\beta = P\frac{ab(2a+b)}{6l} + \frac{Ql^2}{24}.$$

Die Substitution dieser Werthe in den betreffenden Formeln der Nr. 61 liefert für den Angriffspunkt C der Kraft P:

$$[C] = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{ab}{l}$$

$$EJ\gamma = \left(P + \frac{l^2+2ab}{8ab}Q\right)\frac{ab(b-a)}{3l}$$

$$EJ\delta = \left(P + \frac{l^2+ab}{8ab}Q\right)\frac{a^2b^2}{3l}.$$

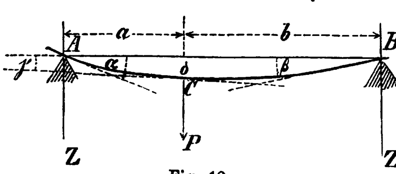


Fig. 12.

Für jeden Querschnitt X oder Y der Strecke AC resp. BC des Stabes findet man die Resultante der äusseren Kräfte, das resultirende Moment derselben = dem Spannungsmomente, die Neigung und die Durchbiegung der elastischen Linie vermittels der Gleichungen:

$$X = A - px \qquad Y = B - py$$

$$[X] = Ax - \frac{px^2}{2} \qquad [Y] = By - \frac{py^2}{2}$$

$$EJ\left(\alpha - \frac{dz}{dx}\right) = \frac{Ax^2}{2} - \frac{px^3}{6} \qquad EJ\left(\beta - \frac{dz}{dy}\right) = \frac{By^2}{2} - \frac{py^3}{6}$$

$$EJ(x\alpha - z) = \frac{Ax^3}{6} - \frac{px^4}{24} \qquad EJ(y\beta - z) = \frac{By^3}{6} - \frac{py^4}{24}.$$

79. — Die elastische Linie ist nur nach Oben concav gekrümmt und hat nur einen Bruchpunkt, welcher entweder in C oder zwischen C und dem Mittelpunkte des Stabes liegt.

Es sei $a \leqq b$ und $m = \frac{l}{2} - a = b - \frac{l}{2}$. Ist dann $\frac{P}{Q} \geqq \frac{m}{a}$, so ist C der Bruchpunkt und

$$max.\ M = [C] = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{ab}{l};$$

ist aber $\frac{P}{Q} < \frac{m}{a}$, so liegt der Bruchpunkt in der Entfernung

$$y_0 = \frac{P}{Q} a + \frac{l}{2}$$

von B und ist $max. M = [Y_0] = \frac{B^2}{2p}$.

In beiden Fällen ist $max. M$ doppelt so gross, als bei beiderseitiger Befestigung des Stabes unter den vortheilhaftesten Winkeln α und β (cf. Nr. 67).

Ein Inflexionspunkt ist nicht vorhanden.

Der einzig vorhandene **Punkt grösster Durchbiegung** (Senkung) liegt in der grösseren Abtheilung BC, und seine Fntfernung y' von B ist die zwischen 0 und b liegende Wurzel der Gleichung:

$$EJ\,\beta = \frac{By'^2}{2} - \frac{py'^3}{6};$$

die grösste Senkung ist bestimmt durch:

$$EJ\,\delta' = y'^3 \left(\frac{B}{3} - \frac{py'}{8}\right).$$

BESONDERE FÄLLE.

80. — **Wenn der Stab nur die bei C angreifende Last P trägt,** so ist:

$$A = P\frac{b}{l};\ B = P\frac{a}{l}$$

$$\alpha = \frac{P}{EJ}\,\frac{ab\,(a+2b)}{6l};\ \beta = \frac{P}{EJ}\,\frac{ab\,(2a+b)}{6l}$$

$$max.\,M = [C] = P\frac{ab}{l}$$

$$\gamma = \frac{P}{EJ}\,\frac{ab\,(b-a)}{3l} = 2\,(\alpha-\beta);\ \delta = \frac{P}{EJ}\,\frac{a^2b^2}{3l}$$

$$y' = \sqrt{\frac{2EJ\beta}{B}} = \sqrt{\frac{b\,(2a+b)}{3}}$$

$$\delta' = \frac{P}{EJ}\,\frac{a}{l}\,\frac{y'^3}{3}.$$

81. — **Wenn der Stab eine gleichförmig auf seiner Länge l vertheilte Last Q nebst der in der Mitte concentrirten Last P zu tragen hat,** so sind alle Verhältnisse symmetrisch in Beziehung auf die Mitte, und man hat:

$$A = B = \frac{P+Q}{2};\qquad \alpha = \beta = \frac{P + \frac{2}{3}Q}{EJ}\,\frac{l^2}{16}$$

$$max.\,M = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{l}{4};\qquad \delta = \frac{P + \frac{5}{8}Q}{EJ}\,\frac{l^3}{48} = \delta'.$$

82. — Nachstehend sind zur **Vergleichung** die Werthe von *max.* M und von δ' unter den Voraussetzungen einer in der Mitte des Stabes angreifenden Last P ($Q = 0$; $a = b$) und einer gleichförmig auf seiner ganzen Länge vertheilten Last Q ($P = 0$) für die 5 Fälle zusammengestellt, dass der Stab

1) beiderseits unterstützt,
2) einerseits unterstützt, anderseits unter dem Richtungswinkel $\alpha = 0$ befestigt,
3) einerseits unterstützt, anderseits unter dem die grösste Tragfähigkeit bedingenden Winkel α befestigt,
4) beiderseits unter den Winkeln $\alpha = \beta = 0$ befestigt,
5) beiderseits unter den der grössten Tragfähigkeit entsprechenden Richtungswinkeln befestigt ist.

	$Q = 0;\ a = b$		$P = 0$	
	max. M	δ'	*max.* M	δ'
1.	$\frac{Pl}{4}$	$\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{48}$	$\frac{Ql}{8}$	$\frac{5}{4}\cdot\frac{Q}{EJ}\frac{l^3}{96}$
2.	$\frac{3}{4}\cdot$ „	0,447 . „	„	0,520 . „
3.	$\frac{2}{3}\cdot$ „	0,507 . „	0,686 . „	0,744 . „
4.	$\frac{1}{2}\cdot$ „	$\frac{1}{4}\cdot$ „	$\frac{2}{3}\cdot$ „	$\frac{1}{4}\cdot$ „
5.	$\frac{1}{2}\cdot$ „	$\frac{1}{4}\cdot$ „	$\frac{1}{2}\cdot$ „	$\frac{1}{2}\cdot$ „

83. — Die Formel für δ sub Nr. 81 ist auf Grund entsprechender Biegungsversuche vorzugsweise geeignet und vielfach benutzt worden (von **Eytelwein**, **Gerstner**, **Lagerhjelm**, **Morin**, **Fairbairn** u. A.) zur **Bestimmung des Elasticitätsmodul** solcher Materialien, welche sich nicht in Form von Drähten oder genügend langen und dünnen Stäben herstellen lassen, wie solche zu einfachen Ausdehnungsversuchen nöthig sind. Der Stab erhält behufs sicherer Berechnung von J aus den gemessenen Querdimensionen am besten einen rechteckigen Querschnitt und wird, auf zwei kantigen Stützen mit dem Abstande l liegend, in der Mitte durch nach und nach vergrösserte Kräfte P belastet. Vermittels der durch gewisse vergrössernde Mittel (Fühlhebel, Keilmass etc.) jedesmal gemessenen Durchbiegung δ findet man dann, unter Q das Eigengewicht des Stabes verstanden, den Elasticitätsmodul

$$E = \frac{P + \frac{5}{8}Q}{\delta J}\frac{l^3}{48},$$

so lange der Stab bei der Entlastung keine merkliche bleibende Durchbiegung zeigt und die gefundenen Werthe von E nicht merklich abnehmen,

überhaupt nur solche Unterschiede zeigen, welche den Beobachtungsfehlern der einzelnen Versuche zugeschrieben werden dürfen.

Ist e die halbe Höhe des in Beziehung auf die Biegungsaxe symmetrischen Querschnitts, so ist der Absolutwerth ε der positiven oder negativen Ausdehnung, welche bei der Belastung durch die Kraft P im tiefsten, resp. höchsten Punkte des mittleren Querschnitts stattfindet:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot max.\, M \cdot \frac{e}{J} = \frac{1}{E}\left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{l}{4}\frac{e}{J}.$$

Er ist entweder $= (\varepsilon')$ oder $= (\varepsilon'')$ — cf. Nr. 4 —, wenn P diejenige belastende Kraft ist, bei welcher eben die hervorgerufene Durchbiegung theilweise merklich bleibend zu sein anfängt; ob dieses $\varepsilon = (\varepsilon')$ oder $= (\varepsilon'')$ ist, wird durch die Vergleichung mit Ausdehnungsversuchen oder auch mit Biegungsversuchen solcher aus demselben Materiale verfertigter Stäbe erkannt, deren Querschnitt nicht symmetrisch in Beziehung auf die Biegungsaxe ist, für welche sonach e' und e'', ε' und ε'' verschieden sind.

Wenn man P zwischen obigen zwei Gleichungen für E und ε eliminirt und Q vernachlässigt, ergiebt sich:

$$\delta = \frac{l^2}{12e}\,\varepsilon,$$

und das Verhältniss dieser Durchbiegung zu der Längenänderung $\Delta l = l\varepsilon$ des bis zu gleichem Werthe von ε der Länge nach gezogenen oder zusammengedrückten Stabes ist:

$$\frac{\delta}{\Delta l} = \frac{l}{12e} = \frac{l}{6h},$$

unter $h = 2e$ die Höhe des Querschnitts verstanden. Es ist also δ grösser, mithin verhältnissmässig sicherer zu messen, als Δl, sofern nur $l > 6h$ genommen wird; darin liegt ein Vorzug dieses Verfahrens der Bestimmung von E, (ε') und (ε'') vor demjenigen durch einfache Ausdehnungs- oder Compressionsversuche.

2. Der Stab hat ausser einer gleichförmig auf seiner ganzen Länge vertheilten Last noch beliebig viele an verschiedenen Stellen concentrirte Lasten zu tragen.

84. — In den allgemeinen Ausdrücken von

$$A \quad B \quad [A] \quad [B] \quad (\text{Nr. } 61)$$

als Functionen von P, Q, α und β für den Fall des beiderseits befestigten Stabes, ferner in den Ausdrücken von

$$A \quad B \quad [A] \quad \beta \quad (\text{Nr } 71)$$

als Functionen von P, Q und α für den Fall des einerseits befestigten, anderseits unterstützten Stabes, endlich in den Ausdrücken von

$$A \quad B \quad \alpha \quad \beta \quad (\text{Nr. } 78)$$

als Functionen von P und Q für den Fall des beiderseits unterstützten Stabes kommt P nur in je einem Gliede allein vor, welches von Q, α und β, resp. von Q und α oder von Q unabhängig, nämlich von der Form: $P.f(a, b$ ist, unter $f(a, b)$ eine Function der Abstände a und b des Angriffspunktes

C der Kraft P von den Stabenden A und B verstanden. Daraus ist zu schliessen, dass, wenn mehre Kräfte

	P_1	P_2	$P_3 \ldots$
den Stab in den Punkten	C_1	C_2	$C_3 \ldots$
angreifen in den Abständen	a_1	a_2	$a_3 \ldots$
von A und „ „ „	b_1	b_2	$b_3 \ldots$

von B, alsdann in jenen Ausdrücken überall nur

$$\Sigma\, P.f(a, b) \text{ statt } P.f(a, b)$$

gesetzt zu werden braucht, um sie diesem allgemeineren Falle entsprechend zu machen. So erhält man

α) für den beiderseits befestigten Stab:

$$A = \Sigma\left[P\,\frac{(3a+b)\,b^2}{l^3}\right] + \frac{Q}{2} + \frac{6EJ}{l^2}\,(-\alpha+\beta)$$

$$B = \Sigma\left[P\,\frac{a^2\,(a+3b)}{l^3}\right] + \frac{Q}{2} + \frac{6EJ}{l^2}\,(\alpha-\beta)$$

$$[A] = -\Sigma\left(P\,\frac{ab^2}{l^2}\right) - \frac{Ql}{12} + \frac{2EJ}{l}\,(2\alpha-\beta)$$

$$[B] = -\Sigma\left(P\,\frac{a^2b}{l^2}\right) - \frac{Ql}{12} + \frac{2EJ}{l}\,(-\alpha+2\beta);$$

β) für den einerseits befestigten, anderseits unterstützten Stab:

$$A = \Sigma\left[P\,\frac{(3a^2+6ab+2b^2)\,b}{2l^3}\right] + \frac{5}{8}\,Q - \frac{3EJ\alpha}{l^2}$$

$$B = \Sigma\left[P\,\frac{a^2\,(2a+3b)}{2l^3}\right] + \frac{3}{8}\,Q + \frac{3EJ\alpha}{l^2}$$

$$[A] = -\Sigma\left[P\,\frac{ab\,(a+2b)}{2l^2}\right] - \frac{Ql}{8} + \frac{3EJ\alpha}{l}$$

$$EJ\beta = \Sigma\left(P\,\frac{a^2b}{4l}\right) + \frac{Ql^2}{48} + \frac{EJ\alpha}{2};$$

γ) für den beiderseits unterstützten Stab:

$$A = \Sigma\left(P\,\frac{b}{l}\right) + \frac{Q}{2}$$

$$B = \Sigma\left(P\,\frac{a}{l}\right) + \frac{Q}{2}$$

$$EJ\,\alpha = \Sigma\left[P\,\frac{ab\,(a+2b)}{6l}\right] + \frac{Ql^2}{24}$$

$$EJ\,\beta = \Sigma\left[P\,\frac{ab\,(2a+b)}{6l}\right] + \frac{Ql^2}{24}.$$

85. — Indem sonach die Werthe von A, B, $[A]$ und $[B]$ in jedem Falle bekannt sind, kann man damit für jeden Querschnitt X des Stabes die Resultante X und das resultirende Moment $[X]$ der äusseren Kräfte finden, insbesondere also auch den durch $X = 0$ charakterisirten mittleren Bruchpunkt und die durch $[X] = 0$ charakterisirten Inflexionspunkte.

Fig. 13.

Ist, unter p die gleichförmig vertheilte Last pro Längeneinheit verstanden,

$$\sum_1^{m-1} P + p a_{m-1} < A < \sum_1^m P + p a_m,$$

so liegt der Bruchpunkt X_0 in der Abtheilung $C_{m-1}\, C_m$ (Fig. 13) in der Entfernung

$$x_0 = \frac{A - \sum_1^{m-1} P}{p}$$

von A, vorausgesetzt dass dieses $x_0 \gtreqless a_m$ ist, widrigenfalls der Angriffspunkt C_m der Bruchpunkt wäre. Letzteres ist immer der Fall, wenn $p = 0$ und

$$\sum_1^{m-1} P < A < \sum_1^m P$$

ist. Wäre aber im Falle $p = 0$

$$\sum_1^{m-1} P = A, \text{ folglich } B = \sum_m^n P,$$

so wäre $x_0 = \frac{0}{0}$, das Spannungsmoment aller Querschnitte von C_{m-1} bis C_m gleich gross und die elastische Linie zwischen diesen Punkten ein Kreisbogen.

86. — Der letztgenannte Specialfall findet z. B. statt bei einem Stabe AB (Fig. 14), welcher, beiderseits bei A und B auf Stützen liegend, bei C_1 und C_2 in den Abständen

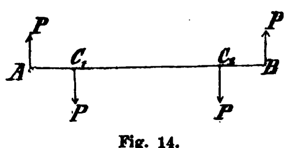


Fig. 14.

$$AC_1 = BC_2 = a$$

mit den gleichen Kräften P belastet ist, während sein Eigengewicht ausser Acht gelassen wird; hier ist von C_1 bis C_2 das Spannungsmoment constant $= Pa$ und der Krümmungsradius der elastischen Linie: $\varrho = \frac{EJ}{Pa}$.

Ist z. B. AB eine Locomotivaxe mit inneren Axenhälsen, wobei die Räder die Stellen der Stützpunkte A und B vertreten und a die Entfernung des Radmittels von der Mitte des Axenhalses bedeutet, so ist dieselbe bei constantem Durchmesser d ein Körper gleichen Widerstandes, und d bestimmt durch

$$Pa = k\,\frac{J}{e} = k\,\frac{\pi d^3}{32}; \text{ etwa } d = 0{,}32\,\sqrt[3]{Pa}$$

entsprechend $k = 310$ für eine schmiedeiserne Axe. Der Radius der kreisförmigen Krümmung von C_1 bis C_2 ist dann

$$\varrho = \frac{EJ}{Pa} = \frac{E}{2k}\,d \text{ nahe } = 3200\,d$$

entsprechend $k = 310$ und $E = 1984000$.

Bei einer Locomotivaxe mit äusseren Zapfen kehren sich blos alle 4 Kräfte P um, indem jetzt A und B die Zapfenmittel, C_1 und C_2 die Radmittel sind. Es gelten dieselben Formeln wie zuvor, nur ist die elastische Linie jetzt nach Unten concav gekrümmt.

Der hier betrachtete Fall liegt u. A. auch vor bei einer Wasserradwelle, welche nur zu tragen hat, indem die gewonnene Arbeit unmittelbar am Radkranze durch einen damit verbundenen Zahnkranz fortgeleitet wird; dabei sind A und B die Mitten der in Lagern liegenden Wellzapfen, C_1 und C_2 die Mitten der Naben der beiden Armsysteme, welche den Radkranz mit der Welle verbinden.

87. — Um bei der vorliegenden allgemeineren Aufgabe die Gleichungen der einzelnen Strecken

$$AC_1 \quad C_1C_2 \quad C_2C_3 \quad \ldots \quad C_nB \quad \text{(Fig. 13)}$$

der elastischen Linie zu finden, ist nun ähnlich zu verfahren, wie sub Nr. 55 angegeben wurde. Bezogen auf A als Anfangspunkt, AB als positive x-Axe und die Lothrechte durch A als positive z-Axe seien in den Punkten $C_1 \quad C_2 \quad C_3 \ldots$

$$\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \ldots \text{ die Werthe von } \frac{dz}{dx},$$

$$\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \ldots \quad " \quad " \quad " \quad z.$$

Ist dann die Momentengleichung der Strecke AC_1:

$\frac{d^2z}{dx^2} = f_1(x)$, so folgt daraus durch Integration:

$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)$, Constante bestimmt durch $x = 0$, $\frac{dz}{dx} = \alpha$,

$z = \psi_1(x)$, " " " $x = 0$, $z = 0$;

daraus mit $x = a_1$: $\gamma_1 = \varphi_1(a_1)$; $\delta_1 = \psi_1(a_1)$.

Ist dann für die Strecke C_1C_2:

$\frac{d^2z}{dx^2} = f_2(x)$, so folgt für dieselbe:

$\frac{dz}{dx} = \varphi_2(x)$, Constante bestimmt durch $x = a_1$, $\frac{dz}{dx} = \gamma_1$,

$z = \psi_2(x)$, " " " $x = a_1$, $z = \delta_1$;

daraus mit $x = a_2$: $\gamma_2 = \varphi_2(a_2)$; $\delta_2 = \psi_2(a_2)$ u. s. f.

Haben in zwei aufeinander folgenden Angriffspunkten C die Winkel γ entgegengesetzte Zeichen, so liegt dazwischen ein Punkt grösster Durchbiegung, welcher durch $\frac{dz}{dx} = 0$ bestimmt ist, unter z die Ordinate eines Punktes der betreffenden Abtheilung der elastischen Linie verstanden.

Statt vom Endpunkte A kann man natürlich auch vom anderen Endpunkte B ausgehen oder auch für einen Theil AC_m des Stabes von A, für den anderen BC_m von B ausgehend die aufeinander folgenden Integrationen verrichten.

3. Der Stab ist auf beliebige Weise belastet.

88 — Ausser den in gewissen Angriffspunkten concentrirten endlichen Kräften $P_1 \; P_2 \ldots$ hat der Stab noch eine stetige Belastung $= p$ pro Längeneinheit, welche aber im Allgemeinen weder constant, noch auf der ganzen Länge des Stabes vertheilt ist; Stetigkeitsunterbrechungen der Belastung,

mithin auch der elastischen Linie an gewissen Stellen C_1 C_2 ... könnten nicht nur von den daselbst angreifenden Kräften P_1 P_2 ..., sondern auch von plötzlichen Aenderungen von p um endliche Grössen Δp herrühren, nur sind die letzteren Stetigkeitsunterbrechungen von einer höheren Ordnung: cf. Nr. 56.

Von den 6 Grössen:

$$A \quad [A] \quad \alpha; \quad B \quad [B] \quad \beta,$$

welche den Zustand an beiden Stabenden bestimmen, sind 2 gegeben, also 4 vorläufig unbekannt; am Ende A z. B. ist α gegeben, wenn der Stab daselbst befestigt, dagegen $[A] = 0$, wenn er dort nur unterstützt ist.

Nach dem Verfahren sub Nr. 87 kann man nun für jeden Querschnitt X des Stabes in der Entfernung x von A die 4 Grössen:

$$X \quad [X] \quad \frac{dz}{dx} \quad z$$

als Functionen gegebener Elemente und der beiden Unbekannten A und $[A]$ oder A und α, desgl. für jeden Querschnitt Y in der Entfernung y von B die Grössen:

$$Y \quad [Y] \quad \frac{dz}{dy} \quad z$$

durch gegebene Elemente und die Unbekannten B und $[B]$, oder B und β ausdrücken, und durch die Gleichsetzung der auf denselben, übrigens beliebig zu wählenden bestimmten Querschnitt bezogenen Ausdrücke von

$$X \text{ und } -Y, \ [X] \text{ und } [Y], \ \frac{dz}{dx} \text{ und } -\frac{dz}{dy}, \ z \text{ und } z$$

erhält man 4 Gleichungen, wodurch die 4 Unbekannten bestimmt sind.

Liegt der Stab beiderseits auf Stützen, so können übrigens A und B auch ohne Rücksicht auf die Biegung direct durch das Hebelgesetz gefunden werden, und ist dann nur zur Berechnung von α und β die Gleichsetzung der auf denselben Punkt der elastischen Linie bezogenen Ausdrücke von

$$\frac{dz}{dx} \text{ und } -\frac{dz}{dy}, \ z \text{ und } z$$

erforderlich.

89. — Als Beispiel einer unter den obigen Fällen sub 2. (Nr. 84—87) nicht begriffenen Belastungsweise, bei welcher zugleich eine durch plötzliche Aenderung von p bedingte Stetigkeitsunterbrechung stattfindet, werde ein Stab AB von der Länge l vorausgesetzt, welcher, mit beiden Enden auf Stützen liegend, beständig eine gleichförmig auf der ganzen Länge vertheilte Last $= p_1$ pro Längeneinheit zu tragen hat, während ausserdem vorübergehend eine andere auf einer gewissen Länge $CD > AB$ gleichförmig vertheilte Last $= p_2$ pro Längeneinheit sich von A oder B herkommend über AB hinwegschiebt. In irgend einem Punkte X der elastischen Linie in der Entfernung x von A ändern sich hierbei die Werthe von

$$X \quad [X] \quad \frac{dz}{dx} \text{ und } z$$

stetig, während der Anfang oder das Ende der beweglichen Last sich zwischen A und B befindet, somit die Belastung des Stabes selbst sich stetig ändert, indem sie auf einem veränderlichen Theile der Länge $AB = p_1$, auf dem andern $= p_1 + p_2 = p$ ist.

Dieser Fall kommt vor bei einem beiderseits unterstützten Brückenträger, dessen ruhende Belastung, im Eigengewichte der Brücke bestehend, constant $= p_1$ pro Längeneinheit vorausgesetzt wird, während die bewegliche Last in einem Menschen- oder Wagenzuge etc. besteht. Indem die Constructionselemente eines solchen, meist zusammengesetzten, Brückenträgers theils durch X und theils durch $[X]$ bedingt sind, so ist besonders die Kenntniss der Maximalwerthe von X und $[X]$ von Interesse, sowie auch desjenigen Werthes von $[X]$, der den Maximalwerth von X, und desjenigen Werthes von X, der den Maximalwerth von $[X]$ begleitet, weil nämlich gewisse Dimensionen unter Umständen von diesen beiden Grössen X und $[X]$ zugleich abhängig gemacht werden müssen. Unbeschadet der Allgemeinheit darf dabei $x < \frac{l}{2}$, d. h. der Querschnitt X als zwischen A und der Trägermitte O liegend, sowie auch die bewegliche Last als von A herkommend vorausgesetzt werden, weil sowohl die entgegengesetzte Lage des Querschnitts in Beziehung auf die Trägermitte, als auch die entgegengesetzte Bewegungsrichtung der beweglichen Last nur eine umgekehrte Reihenfolge der Aenderungen der in dem betrachteten Querschnitte stattfindenden Einwirkungen zur Folge hat.

Man findet nun, dass das Spannungsmoment in dem beliebigen Querschnitte X seinen grössten Werth dann erreicht, wenn die bewegliche Last die ganze Länge AB überdeckt, und es ist also derselbe nebst dem entsprechenden Werthe von X:

$$max.[X] = p\frac{x(l-x)}{2};\quad X = p\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Die Resultante X dagegen erreicht ihren grössten Werth in dem Augenblicke, in welchem die bewegliche Last von dem betreffenden Querschnitte X bis zu dem entfernteren Stützpunkte B reicht, und zwar ist dann

$$max.X = p\left(\frac{l}{2} - x\right) + p_2\frac{x^2}{2l};\quad [X] = \left(p - p_2\frac{x}{l}\right)\frac{x(l-x)}{2}.*)$$

90. — Der Punkt X_0, für welchen $X = 0$, also $[X]$ ein Maximum ist, ändert bei der in der vorhergehenden Nr. betrachteten Aufgabe seine Lage

*) Wenn man diesen mit x veränderlichen Werthen von X und $[X]$ entsprechend die Dimensionen aller Querschnitte des Trägers so ermittelt, dass derselbe möglichst ein Körper von gleichem Widerstande wird (Nr. 35), so wird danach die zu Grunde liegende Voraussetzung eines constanten Werthes von p_1 nicht mehr genau zutreffen; eine diesem Umstande entsprechende Berichtigung der vorläufig gefundenen Dimensionen ist aber im vorliegenden Falle, da X und $[X]$ von der Art der Biegung des Stabes unabhängig sind, verhältnissmässig leicht auszuführen, besonders wenn schon der praktischen Ausführung wegen die stetige Veränderlichkeit des Querschnitts durch eine nach endlichen Strecken sprungweise Abstufung der Dimensionen ersetzt wird.

mit dem Belastungszustande. Kommt die bewegliche Last von der Stütze A her, so bewegt sich in dem Augenblicke, in welchem ihr vorderer Endpunkt C die Stütze A überschreitet, der Punkt X_0 aus der Trägermitte O heraus nach der Richtung OA dem Punkte C entgegen und trifft damit an einer gewissen Stelle M zusammen, von welchem Augenblicke an der Punkt X_0 seine Bewegungsrichtung umkehrt und, hinter C sich herbewegend, die Trägermitte O wieder erreicht, wenn die bewegliche Last den ganzen Träger AB überdeckt; wenn aber darauf das hintere Ende D dieser Last den Stützpunkt A überschreitet, setzt sich vor ihm her der Punkt X_0 nach der Richtung OB wieder in Bewegung, wird vom Punkte D an einer gewissen Stelle N im Abstande $ON = OM$ von O eingeholt und kehrt dann zur Trägermitte O zurück, während D die noch übrige Strecke NB des Trägers durchläuft.

Die Strecke MN, innerhalb welcher die Resultante X ihr Zeichen ändert, ist bei einem zusammengesetzten Träger von constructiver Wichtigkeit in Betreff der Anordnung derjenigen Constructionsglieder, welche die beiden Streckbalken oder Gurtungen des Trägers verbinden und vorzugsweise der Einwirkung dieser Kraft X ausgesetzt sind. Die Lage des Punktes M in der Trägerhälfte AO ist aber bedingt durch den Minimalwerth, welchen die Resultante X in irgend einem Punkte dieser Trägerhälfte annehmen kann; derselbe ist:

$$min. X = p_1\left(\frac{l}{2} - x\right) - p_2\frac{x^2}{2l}$$

und findet in dem Augenblicke statt, in welchem die bewegliche Last von diesem Punkte X bis zur nächstgelegenen Stütze A reicht; $AM = BN = m$ ist derjenige Werth von x, für welchen

$$min. X = 0$$

ist, woraus sich ergiebt:

$$\frac{m}{l} = -\frac{p_1}{p_2} + \sqrt{\frac{p_1}{p_2}\left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right)}$$

$$\text{z. B. für } \frac{p_1}{p_2} = \quad 1/4 \quad 1/2 \quad 1 \quad 2$$

$$\frac{m}{l} = 0{,}309 \quad 0{,}366 \quad 0{,}414 \quad 0{,}449;$$

$\frac{m}{l}$ ist um so kleiner, d. h. die Strecke MN, in welcher der Punkt X_0 sich hin und herbewegt, verhältnissmässig um so grösser, je kleiner $\frac{p_1}{p_2}$ oder je kleiner die Spannweite der Brücke ist.

c. Der an den Enden unterstützte oder befestigte Stab ruht ausserdem noch auf einer Anzahl von Zwischenstützen.

91. — Während die Enden des Stabes wie bisher mit A und B bezeichnet werden, seien von A aus gerechnet

die n Zwischenstützen mit . . . . C_1 C_2 C_3 . . . . C_n
die Längen der $(n+1)$ Abtheilungen . . . AC_1 C_1C_2 C_2C_3 . . . . C_nB
mit . . . . l l_1 l_2 . . . . l_n
bezeichnet. Diese Zwischenstützpunkte brauchen im Allgemeinen nicht genau in der Horizontalen AB zu liegen; es seien vielmehr, unter $A, C_1, C_2 \ldots$ die betreffenden Punkte der elastischen Linie verstanden,
λ λ_1 . . . λ_n die kleinen Winkel der
Richtungen AC_1 C_1C_2 . . . . C_nB mit der Richtung AB,
welche Winkel positiv oder negativ gesetzt werden, jenachdem sie unterhalb oder oberhalb einer durch
A C_1 . . . C_n gezogenen Horizontalen liegen. In gleicher Weise werden die Winkel
γ_1 γ_2 . . . . γ_n
der elastischen Linie bei C_1 C_2 . . . . C_n
mit der Horizontalen AB positiv oder negativ gesetzt, ihre Neigungswinkel α und β bei A und B aber so verstanden wie in Nr. 58.

Bezogen auf AB als x-Axe und eine Lothrechte durch A als z-Axe seien endlich noch . . . . δ_1 δ_2 . . . δ_n
die z-Coordinaten der Punkte C_1 C_2 . . . C_n.

Ausser den betreffenden 4 Unbekannten der 6 Grössen:
$$A \quad [A] \quad \alpha; \quad B \quad [B] \quad \beta,$$
welche den Zustand an den beiden Stabenden bestimmen (cf. Nr. 88), sind nun auch die Reactionen
$$C_1 \quad C_2 \quad \ldots \quad C_n$$
der gleich bezeichneten Zwischenstützpunkte a priori unbekannt. Durch dieselben und durch die gegebenen Elemente lassen sich aber nach Nr. 88 jene ersteren vier Unbekannten ausdrücken, und indem man dann damit auch die z-Coordinate für jeden Punkt der elastischen Linie ausdrücken kann, dieselbe aber in den Zwischenstützpunkten $= \delta_1, \delta_2 \, . \, . \, \delta_n$ gegeben ist, erhält man so viele Gleichungen, als zur Bestimmung der noch übrigen Unbekannten nöthig sind.

Die $2n+2$ Elemente l und λ, wodurch die Lagen der Zwischenstützpunkte gegen AB bestimmt sind, können so gewählt werden, dass ausser
$$\Sigma l = AB \text{ und } \Sigma \lambda = 0$$
noch $2n$ Bedingungen dadurch erfüllt werden, dass z. B. die Spannungsmomente in $2n+1$ relativen Bruchquerschnitten einander gleich werden oder zu den betreffenden Widerstandsmomenten W' und W'' (Nr. 50) dieselben Verhältnisse erhalten. Ist der Stab auch an den Enden nur unterstützt, so sind überhaupt nicht mehr als $2n+1$ relative Bruchquerschnitte vorhanden: je einer über den Zwischenstützen und in den durch diese begrenzten $n+1$ Abtheilungen; ist aber der Stab bei A oder B oder beiderseits befestigt, so kommen die Spannungsmomente daselbst als relativ grösste hinzu, und müssen dann noch die Winkel α und β zu Hülfe genommen werden, um zu machen, dass alle relativen Bruchquerschnitte gleiche Sicherheit gegen eine übermässige Spannung oder Pressung gewähren.

92. — **Wenn der Stab in jeder Abtheilung eine gleichförmig auf deren Länge vertheilte Last ausser beliebig vielen an verschiedenen Stellen concentrirten Lasten** zu tragen hat, so lässt sich die in voriger Nr. im Allgemeinen angedeutete Berechnung der zur ferneren Untersuchung nöthigen $n+4$ unbekannten Constanten mit Hülfe der allgemeinen Relationen sub Nr. 84 wesentlich vereinfachen.

Bezeichnen nämlich C_1, C_2, C_3 irgend 3 aufeinander folgende Stützpunkte, so kann man nach den Formeln für $[A]$ und $[B]$ sub Nr. 84, α) mit

$$[A] = [C_1];\ [B] = [C_2];\ \alpha = \gamma_1 - \lambda_1;\ \beta = \lambda_1 - \gamma_2$$

die beiden unbekannten Spannungsmomente $[C_1]$ und $[C_2]$ durch gegebene Elemente und die beiden unbekannten γ_1 und γ_2 ausdrücken, woraus durch Elimination von γ_1 eine Gleichung

$$f\,\{[C_1],\ [C_2],\ \gamma_2\} = 0$$

zwischen $[C_1]$, $[C_2]$ und γ_2 erhalten wird. Eine ganz analoge Relation besteht zwischen $[C_2]$, $[C_3]$ und γ_2, und durch Elimination von γ_2 zwischen beiden erhält man eine Gleichung

$$F\,\{[C_1],\ [C_2],\ [C_3]\} = 0$$

zwischen den Spannungsmomenten der Querschnitte über irgend 3 aufeinander folgenden Stützpunkten. Setzt man nun diese Gleichung n Mal, d. h. so viel Mal an, als je 3 aufeinander folgende Stützpunkte (die beiden Endpunkte A und B mitgerechnet) vorhanden sind, so hat man in Verbindung mit den beiden Gleichungen:

$$f\,\{[A],[C_1],\alpha\} = 0 \text{ und } f\,\{[B],[C_n],\beta\} = 0$$

im Ganzen $n+2$ Gleichungen, wodurch die n Spannungsmomente $[C_1]$, $[C_2]$ . . . $[C_n]$ und die beiden nicht gegebenen der vier Grössen $[A]$, $[B]$, α, β bestimmt sind.

Sind nun		S_1	S_2	. . .
diejenigen Theile der Reactionen		C_1	C_2	. . .
welche von den Belastungen der Abtheilungen		C_1C_2	C_2C_3	. . .
herrühren, sind ferner	R	R_1	R_2	. . .
die resultirenden Kräfte, welche die Abtheilungen	AC_1	C_1C_2	C_2C_3	. . .
belasten, und	M	M_1	M_2	. . .
ihre Momente in Beziehung auf die Punkte	C_1	C_2	C_3	. . .

so ist:

$$[C_1] = [A] + Al - M;\ [C_2] = [C_1] + S_1 l_1 - M_1 \text{ etc.},$$

$$\text{also } A = \frac{M}{l} + \frac{[C_1]-[A]}{l}$$

$$S_1 = \frac{M_1}{l_1} + \frac{[C_2]-[C_1]}{l_1};\ C_1 = R - A + S_1$$

$$S_2 = \frac{M_2}{l_2} + \frac{[C_3]-[C_2]}{l_2};\ C_2 = R_1 - S_1 + S_2 \text{ etc.},$$

wodurch dann die fraglichen $n+4$ Unbekannten, nämlich die $n+2$ Reactionen A, C_1, C_2 . . . C_n, B und die beiden nicht gegebenen der 4 Grössen $[A]$, $[B]$, α, β bestimmt sind. Zugleich wurden als Zwischenglieder die

Spannungsmomente in den Querschnitten über den Zwischenstützen gefunden, welche als relativ grösste im weiteren Verlaufe der Untersuchung ohnehin zu berechnen gewesen wären.

93. — Der Stab sei auch an den Enden ebenso wie in den Zwischenpunkten C nur gestützt und in den einzelnen Abtheilungen nur gleichförmig belastet:

mit $p \quad p_1 \quad p_2 \ldots$ pro Längeneinheit
in den Abtheilungen $= l \quad l_1 \quad l_2 \ldots$ *).

Die in voriger Nummer erwähnten Gleichungen $f = 0$ und $F = 0$ werden dann:

$$[C_1] + 2[C_2] = -\frac{p_1 l_1^2}{4} + \frac{6EJ}{l_1}(\lambda_1 - \gamma_2)$$

$$l_1[C_1] + 2(l_1 + l_2)[C_2] + l_2[C_3] = -\frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4} + 6EJ(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Das System der n Gleichungen, welche nach Analogie dieser letzten Gleichung für je drei aufeinander folgende Stützpunkte angesetzt werden, bestimmt wegen

$$[A] = [B] = 0$$

die n unbekannten Spannungsmomente:

$$[C_1] \quad [C_2] \quad \ldots \quad [C_n] \text{ **)}.$$

---

*) Dieser Fall hat u. A. Interesse behufs der (wenigstens vorläufig angenäherten) Berechnung eines Brückenträgers, der ununterbrochen über mehrere Pfeiler fortläuft; wird dabei auch einstweilen die vom Eigengewichte der Brücke herrührende bleibende Belastung als gleichförmig auf der ganzen Länge vertheilt angenommen, so entspricht doch die Verschiedenheit von p in den einzelnen Abtheilungen der Voraussetzung, dass einzelne Abtheilungen ausserdem durch eine bewegliche gleichförmig vertheilte Last augenblicklich überdeckt sind. Indem man so statt aller möglichen Längen und Lagen eines oder mehrerer getrennter Lastzüge auf der Brücke nur diejenigen Längen und Lagen betrachtet, wobei gerade ganze Abtheilungen zwischen zwei Stützpunkten von dem Zuge oder den Zügen belastet sind, erhält man die Maximalwerthe der Schubkraft und des Spannungsmoments, welche in irgend einem Querschnitte stattfinden können, wenn auch nicht genau, so doch mit ziemlicher Näherung.

**) In der Auflösung dieser Gleichungen besteht die einzige Schwierigkeit; sie geschieht am einfachsten dadurch, dass diese Gleichungen:

$$2(l + l_1)[C_1] + l_1[C_2] = H_1$$
$$l_1[C_1] + 2(l_1 + l_2)[C_2] + l_2[C_3] = H_2$$
$$l_2[C_2] + 2(l_2 + l\ )[C_3] + l_3[C_4] = H_3 \text{ etc.}$$

addirt werden nach ihrer Multiplication mit gewissen Coefficienten $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3 \ldots$, welche so gewählt sind, dass bei der Addition alle Unbekannten bis auf eine verschwinden. Nimmt man zu dem Ende $\mu_1 = 1$, so verschwindet offenbar

$[C_1]$, wenn $\mu_2 = -2\dfrac{l + l_1}{l_1}$, dann auch

$[C_2]$, „ $\mu_3 = -\dfrac{l_1}{l_2} - 2\dfrac{l_1 + l_2}{l_2}\mu_2$,

$[C_3]$, „ $\mu_4 = -\dfrac{l_2}{l_3}\mu_2 - 2\dfrac{l + l_3}{l_3}\mu_3$ etc.

genommen wird. Ist so aus der resultirenden Gleichung mit nur $[C_n]$ diese Unbekannte gefunden, so findet man sofort $[C_{n-1}]$ aus der letzten,
dann $[C_{n-2}]$ „ „ vorletzten etc.
der ursprünglichen Gleichungen.

Danach findet man:

$$A = \frac{pl}{2} + \frac{[C_1]}{l}$$

$$S_1 = \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{[C_2]-[C_1]}{l_1};\quad C_1 = pl - A + S_1$$

$$S_2 = \frac{p_2 l_2}{2} + \frac{[C_3]-[C_2]}{l_2};\quad C_2 = p_1 l_1 - S_1 + S_2 \text{ etc.}$$

Sind ferner . . . . D D_1 D_2 . . . die mittleren Bruchpunkte
in den Abtheilungen . . . . . . l l_1 l_2 . . .
und d d_1 d_2 . . . ihre Entfernungen
von den Punkten A C_1 C_2 . . . ,
so ist nach Nr. 62:

$$d = \frac{A}{p};\quad [D] = \frac{A^2}{2p}$$

$$d_1 = \frac{S_1}{p_1};\quad [D_1] = [C_1] + \frac{S_1^2}{2p_1}$$

$$d_2 = \frac{S_2}{p_2};\quad [D_2] = [C_2] + \frac{S_2^2}{2p_2} \text{ etc.}$$

Desgl. sind die Abstände . . . f f_1 f_2 . . .
der Inflexionspunkte . F F_1 F_2 . . .
von den Stützpunkten A C_1 C_2 . . .
nach den betreffenden Formeln sub Nr. 62:

$$f = 2d$$

$$f_1 = d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + 2\frac{[C_1]}{p_1}}$$

$$f_2 = d_2 \pm \sqrt{d_2^2 + 2\frac{[C_2]}{p_2}} \text{ etc.},$$

wobei die Doppelzeichen beide gelten, entsprechend je 2 Inflexionspunkten in jeder Abtheilung ausser den beiden äussersten.

Um endlich auch nach Nr. 62 die Punkte grösster Durchbiegung und die grössten Durchbiegungen selbst zu finden, sind zuvor die Winkel α, γ_1, γ_2 . . . zu berechnen, was nach Analogie der obigen Gleichung zwischen

$$[C_1],\ [C_2] \text{ und } \gamma_2$$

geschehen kann.

94. — In den folgenden Nummern sind beispielsweise die Resultate der in Nr. 93 angedeuteten Rechnung für einige Fälle unter der besonderen Voraussetzung zusammengestellt, dass alle Stützen gleich hoch und in gleichen Entfernungen liegen und dass die Belastung auf der ganzen Länge des Stabes gleichförmig vertheilt ist:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \ldots\ldots = \lambda_n \doteq 0$$

$$l = l_1 = l_2 \ldots\ldots = l_n$$

$$p = p_1 = p_2 \ldots\ldots = p_n.$$

In gleichen Abständen beiderseits von der Mitte des Stabes sind dann alle Verhältnisse gleich, und sind deshalb alle Werthe nur für die dem End-

punkte A zunächst liegende Stabhälfte angegeben. Auch die Gleichungen zur Berechnung der Spannungsmomente

$$[C_1] \quad [C_2] \ldots$$

reduciren sich dadurch auf nur $\frac{n}{2}$ resp. $\frac{n+1}{2}$, jenachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist; sie sind nämlich:

$$4[C_1] + [C_2] = -\frac{pl^2}{2}$$

$$[C_1] + 4[C_2] + [C_3] = -\frac{pl^2}{2}$$

$$[C_2] + 4[C_3] + [C_4] = -\frac{pl^2}{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\left[C_{\frac{n}{2}-1}\right] + 5\left[C_{\frac{n}{2}}\right] = -\frac{pl^2}{2} \text{ resp. } 2\left[C_{\frac{n-1}{2}}\right] + 4\left[C_{\frac{n+1}{2}}\right] = -\frac{pl^2}{2}.$$

95. — **Der Stab liegt auf 3 Stützen:** *)

$$A \quad C_1 \quad B.$$

Dann ist:

$$[C_1] = -\frac{pl^2}{8}$$

$$A = \frac{3}{8}pl; \; C_1 = -\frac{5}{4}pl$$

$$A : C_1 = 3 : 10$$

$$d = \frac{3}{8}l; \; [D] = 0{,}0703\,pl^2 = -0{,}562\,[C_1]$$

$$f = 0{,}75\,l.$$

96. — **Der Stab liegt auf 4 Stützen:**

$$A \quad C_1 \quad C_2 \quad B.$$

Dann ist:

$$[C_1] = -\frac{pl^2}{10}$$

$$A = \frac{2}{5}pl; \; C_1 = \frac{11}{10}pl$$

$$A : C_1 = 4 : 11$$

$$d = \frac{2}{5}l; \; [D] = 0{,}08\,pl^2 = -0{,}8\,[C_1]$$

$$d_1 = \frac{1}{2}l; \; [D_1] = 0{,}025\,pl^2$$

$$f = 0{,}8\,l; \; f_1 = 0{,}276\,l.$$

---

*) Für diesen Fall ergeben sich die Resultate auch aus Nr. 74.

97. — Der Stab liegt auf 5 Stützen:

$A \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad B.$

Dann ist:

$$[C_1] = -\frac{3}{28} p l^2; \; [C_2] = -\frac{1}{14} p l^2 \;.$$

$$[C_1] : [C_2] = 3 : 2$$

$$A = \frac{11}{28} p l; \; C_1 = \frac{8}{7} p l; \; C_2 = \frac{13}{14} p l$$

$$A : C_1 : C_2 = 11 : 32 : 26$$

$$d = \frac{11}{28} l; \; [D] = 0{,}0772 \, p l^2 = -0{,}722 \, [C_1]$$

$$d_1 = \frac{15}{28} l; \; [D_1] = 0{,}0364 \, p l^2$$

$$f = 0{,}786 \, l; \; f_1 = \begin{cases} 0{,}266 \, l \\ 0{,}805 \, l. \end{cases}$$

98. — Der Stab liegt auf 7 Stützen:

$A \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5 \quad B.$

Dann ist:

$$[C_1] = -\frac{11}{104} p l^2; \; [C_2] = -\frac{1}{13} p l^2; \; [C_3] = -\frac{9}{104} p l^2$$

$$[C_1] : [C_2] : [C_3] = 11 : 8 : 9$$

$$A = \frac{41}{104} p l; \; C_1 = \frac{59}{52} p l; \; C_2 = \frac{25}{26} p l; \; C_3 = \frac{53}{52} p l$$

$$A : C_1 : C_2 : C_3 = 41 : 118 : 100 : 106$$

$$d = \frac{41}{104} l; \; [D] = 0{,}0777 \, p l^2 = -0{,}735 \, [C_1]$$

$$d_1 = \frac{55}{104} l; \; [D_1] = 0{,}0340 \, p l^2$$

$$d_2 = \frac{51}{104} l; \; [D_2] = 0{,}0434 \, p l^2$$

$$f = 0{,}788 \, l; \; f_1 = \begin{cases} 0{,}268 \, l \\ 0{,}790 \, l \end{cases}; \; f_2 = \begin{cases} 0{,}196 \, l \\ 0{,}785 \, l. \end{cases}$$

99. — Der Stab liegt auf 9 Stützen:

$A \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5 \quad C_6 \quad C_7 \quad B.$

Dann ist:

$$[C_1] = -\frac{41}{388} p l^2; \; [C_2] = -\frac{15}{194} p l^2; \; [C_3] = -\frac{33}{388} p l^2; \; [C_4] = -\frac{8}{97} p l^2$$

$$[C_1] : [C_2] : [C_3] : [C_4] = 41 : 30 : 33 : 32$$

$$A = \frac{153}{388} p l; \; C_1 = \frac{110}{97} p l; \; C_2 = \frac{187}{194} p l; \; C_3 = \frac{98}{97} p l; \; C_4 = \frac{193}{194} p l$$

$$A : C_1 : C_2 : C_3 : C_4 = 153 : 440 : 374 : 392 : 386$$

$$d = \frac{153}{388} l; \; [D] = 0{,}0777 \, p l^2 = -0{,}735 \, [C_1]$$

$$d_1 = \frac{205}{388} l; \ [D_1] = 0{,}0339\, p l^2$$

$$d_2 = \frac{191}{388} l; \ [D_2] = 0{,}0438\, p l^2$$

$$d_3 = \frac{195}{388} l; \ [D_3] = 0{,}0412\, p l^2$$

$$f = 0{,}789\, l; \quad f_1 = \begin{cases} 0{,}268\, l \\ 0{,}789\, l \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} 0{,}196\, l \\ 0{,}788\, l \end{cases}; \quad f_3 = \begin{cases} 0{,}215\, l \\ 0{,}790\, l. \end{cases}$$

100. — Die Beispiele sub Nr. 95—99 gestatten einige Folgerungen, welche dazu dienen können, bei noch grösserer Zahl von Stützpunkten unter den sub Nr. 94 angeführten Voraussetzungen auch ohne weitere Rechnung die Hauptverhältnisse zu beurtheilen. Es ist nämlich jenen Beispielen zufolge bei

	3	4	5	7	9 Stützen:
$\frac{-[C_1]}{p l^2} =$	0,125	0,1	0,1071	0,1058	0,1057
$\frac{[D]}{p l^2} =$	0,0703	0,08	0,0772	0,0777	0,0777
$\frac{[D]}{-[C_1]} =$	0,562	0,8	0,722	0,735	0,735
$\frac{A}{p l} =$	0,375	0,4	0,3929	0,3942	0,3943
$\frac{C_1}{p l} =$	1,25	1,1	1,1429	1,1346	1,1340.

Die Absolutwerthe der Spannungsmomente über den Stützen nehmen in jedem Falle von den Enden A und B gegen die Mitte des Stabes hin abwechselnd zu und ab; $-[C_1]$ ist immer am grössten und nähert sich bei zunehmender Zahl der Stützen einer gewissen Grenze $= 0{,}1057 \ldots p l^2$. Nach der Mitte hin nähert sich $-[C_m]$ natürlich der Grenze $\frac{p l^2}{12}$ (cf. Nr. 66).

Auch die Spannungsmomente der mittleren Bruchquerschnitte nehmen von Aussen nach der Mitte hin abwechselnd ab und zu; $[D]$ ist am grössten und nähert sich der Grenze $0{,}0777 \ldots p l^2$. Nach der Mitte hin ist der Grenzwerth von $[D_m]$ offenbar $= \frac{p l^2}{24}$ (cf. Nr. 66).

Immer ist $-[C_1] > [D]$; das Verhältniss $\frac{[D]}{-[C_1]}$ nähert sich mit zunehmender Zahl von Stützen der Grenze 0,735.

Die Pressung der äusseren Stützen hat zur Grenze: $A = 0{,}3943 \ldots p l$. Die Pressungen der Zwischenstützen C_1, $C_2 \ldots$ sind abwechselnd grösser und kleiner, als $p a$ und haben nach der Mitte hin $p a$ zur Grenze; C_1 ist immer die grösste Pressung einer Stütze und nähert sich der Grenze $1{,}134 \ldots p l$.

II. Gerader stabförmiger Körper von veränderlichem Querschnitte.

a. Allgemeine Methode.

101. — Wenn in diesem Falle der Stab $AB = l$ am einen Ende befestigt, am anderen frei, oder wenn er beiderseits unterstützt ist, so sind die resultirenden Schubkräfte R und Spannungsmomente M der verschiedenen Querschnitte unabhängig von der Biegung des Stabes, lassen sich also ebenso berechnen, als ob der Querschnitt constant wäre.

Um bei beliebiger Belastung die Art der Biegung, also die Gleichung der elastischen Linie zu finden, ist bei stetiger Veränderlichkeit des Querschnitts nach Analogie von Nr. 55 zu verfahren: für den bei A befestigten Stab wird die horizontale Tangente der elastischen Linie im Punkte A, für den beiderseits unterstützten Stab die horizontale Verbindungslinie AB der Endpunkte der elastischen Linie als x-Axe, in beiden Fällen die Lothrechte durch A als z-Axe angenommen, und werden dann nach und nach die Gleichungen

$$z = \psi_1(x);\ z = \psi_2(x) \ldots$$

der einzelnen Strecken der elastischen Linie entwickelt, welche event. durch solche Punkte getrennt sind, in denen eine Stetigkeitsunterbrechung (cf. Nr. 56) stattfindet; in den betreffenden je 2 Mal zu integrirenden Gleichungen:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f_1(x);\ \frac{d^2z}{dx^2} = f_2(x) \ldots$$

sind nur die rechten Seiten $= \frac{M}{EJ}$ jetzt weniger einfache Functionen von x wegen der gleichzeitigen Veränderlichkeit von M und J. Auch ist zu bemerken, dass im Falle des beiderseits unterstützten Stabes die Gleichungen der einzelnen Strecken vorläufig mit der unbekannten Constanten α behaftet erhalten werden, deren Werth erst schliesslich durch Substitution der zusammengehörigen Werthe

$$x = l;\ z = 0$$

in der Gleichung der letzten Strecke nächst dem Stützpunkte B gefunden wird.

Bei stellenweise plötzlichen Aenderungen des Querschnitts ändert sich in diesem Verfahren Nichts, als dass dadurch neue Stetigkeitsunterbrechungen der elastischen Linie an den betreffenden Stellen bedingt werden, welche, entsprechend einer plötzlichen Aenderung des Krümmungsradius ϱ oder der zweiten Ableitung $\frac{d^2z}{dx^2}$, von der 3ten Ordnung in Beziehung auf die Ordinate z sind, während die Stetigkeitsunterbrechungen der Belastung nur solche der 4ten oder 5ten Ordnung von z verursachen. (Cf. Nr. 56.)

102. — Wenn der Stab an einem Ende befestigt, am anderen unterstützt, oder wenn er beiderseits befestigt ist oder end-

lich noch auf Zwischenstützen ruht, so sind die Schubkräfte und Spannungsmomente der Querschnitte von der Art der Biegung abhängig, und es ist dann nach Analogie von Nr. 88 resp. 91 zu verfahren. Plötzliche Querschnittsänderungen bedingen dabei wieder Stetigkeitsunterbrechungen der elastischen Linie, also verschiedene Gleichungen ihrer beiderseits angrenzenden Theile.

Bei zusammengesetzten Trägern (Brückenträgern) macht im Allgemeinen die Rücksicht auf die praktische Ausführung dergleichen plötzliche Aenderungen des Querschnitts an gewissen Stellen nöthig, und zwar in der Weise, dass zwischen je zwei aufeinander folgenden dieser Stellen der Querschnitt constant gehalten wird; zur Ermittelung der passenden Querschnittsdimensionen der einzelnen so gebildeten Strecken des Trägers kann man dieselben zunächst näherungsweise denjenigen Werthen von R und M entsprechend machen, welche sich nach den sub I. entwickelten Regeln unter der Voraussetzung eines durchweg constanten Querschnitts ergeben, dann den dadurch veränderten Werthen des Trägheitsmoments und des ursprünglich angenommenen Eigengewichts des Trägers entsprechend corrigirte Werthe von R und M berechnen, und diesen gemäss endlich die Querschnitte der einzelnen Trägerabtheilungen corrigiren.

103. — Wenn z. B. ein continuirlich über mehre Pfeiler C_1 C_2 .. C_n fortlaufender Brückenträger zu berechnen ist, der auch auf den Endpfeilern A und B nur lose aufliegt, so kann man zunächst unter Voraussetzung eines constanten Querschnitts und eines constanten erfahrungsmässigen mittleren Eigengewichts des Trägers pro Längeneinheit, eines gewissen den Umständen entsprechenden Gewichts der Brückenbahn und unter Berücksichtigung verschiedener Belastungszustände nach Massgabe von Nr. 93, 1. Anmerkung, also überhaupt unter der Annahme gleichförmig vertheilter verschiedener Belastungen

$= p \quad p_1 \quad p_2 \; \ldots \; p_n$ pro Längeneinheit

in den Strecken $AC_1 \quad C_1C_2 \quad C_2C_3 \; \ldots \; C_nB$

nach der sub Nr. 93 angegebenen Methode die grössten Werthe von R und M berechnen, welche in den Abtheilungen:

$$\begin{array}{lllll} A\,C^1 & C^1\,C^2 & C^2\,C^3 & \ldots & C^m\,C_1 \\ C_1\,C_1^1 & C_1^1\,C_1^2 & C_1^2\,C_1^3 & \ldots & C_1^{m_1}\,C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n\,C_n^1 & C_n^1\,C_n^2 & C_n^2\,C_n^3 & \ldots & C_n^{m_n}\,B \end{array}$$

vorkommen, für welche schliesslich constante und sprungweise veränderte Querschnitte gewählt werden sollen. Hat man dann demgemäss die Querschnitte dieser Abtheilungen passend gewählt, so sind dadurch sowohl die Belastungen pro Längeneinheit*), als auch namentlich die Trägheitsmomente

*) Auch kann man jetzt ausser denjenigen Belastungszuständen, wobei die beweg-

andere und zwar im Allgemeinen verschieden für die verschiedenen Abtheilungen geworden, etwa:

$$\begin{array}{llll} p\,;\,J & p^1\,;\,J^1 & \ldots\ldots & p^m\,;\,J^m \\ p_1;\,J_1 & p_1^1\,;\,J_1^1 & \ldots\ldots & p_1^{m_1};\,J_1^{m_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n;\,J_n & p_n^1\,;\,J_n^1 & \ldots\ldots & p_n^{m_n};\,J_n^{m_n}. \end{array}$$

In Folge dessen ändert sich auch die elastische Linie, und ändern sich also auch die Werthe von R und M für die verschiedenen Querschnitte, welche erst gefunden werden, nachdem zuvor die geänderten Werthe der Reactionen der Stützen berechnet wurden.

Entwickelt man zu dem Ende successive die Gleichungen aller

$$(m + 1) + (m_1 + 1) + \ldots + (m_n + 1)$$

Abtheilungen des Trägers, von A angefangen, bezogen auf AB als Abscissenaxe und die Lothrechte durch A als Ordinatenaxe, so erhält man dieselben behaftet mit den $(n + 2)$ Unbekannten:

$$A \quad \alpha \quad C_1 \quad C_2 \ldots\ldots C_n,$$

zu deren Bestimmung $(n + 2)$ Gleichungen dienen: $(n + 1)$ Gleichungen, welche ausdrücken, dass die Ordinaten der Stützpunkte

$$C_1 \quad C_2 \ldots C_n \quad B$$

gegebene Grössen sind, und eine Gleichung, welche durch Elimination der Reactionskraft B zwischen den beiden Gleichgewichtsbedingungen aller äusseren Kräfte an dem als starr gedachten ganzen Träger hervorgeht.

104. — Die zeitraubenden Rechnungen, welche mit dem in voriger Nr. erklärten Verfahren verbunden sind, machen es wünschenswerth, dasselbe durch eine kürzere Methode ersetzen zu können. Zu dem Zwecke liegt es nahe, analog dem Verfahren sub Nr. 93 zunächst auch hier eine allgemeine Relation zwischen den Spannungsmomenten der Querschnitte über 3 aufeinander folgenden Stützpunkten C_1, C_2, C_3 aufzusuchen, weil, wenn aus den n nach Analogie dieser Relation anzusetzenden Gleichungen jene n unbekannten Spannungsmomente gefunden wären, dadurch die Reactionen der Stützen ebenso einfach wie in Nr. 93 bestimmt sein würden, mithin auch die Schubkräfte R und Spannungsmomente M für alle Querschnitte des Trägers dann unmittelbar berechnet werden könnten.

Um eine solche Relation

$$F\,\{\,[C_1],\,[C_2],\,[C_3]\,\} = 0$$

zu finden, kann man bemerken, dass die veränderte Biegung und dadurch bedingte andere Druckvertheilung auf die Stützen bei dem Träger, dessen

---

liche Last durch die Stützpunkte begrenzt wird, noch solche der Rechnung unterwerfen, wobei diese Last sich bis zu beliebigen der Zwischenpunkte

$$\begin{array}{llll} C^1 & C^2 & C^3 & \ldots \\ C_1{}^1 & C_1{}^2 & C_1{}^3 & \ldots \end{array}$$

erstreckt.

Querschnitt nicht mehr constant ist, in weit höherem Grade durch das veränderliche Trägheitsmoment J, als durch die veränderte Belastung pro Längeneinheit bedingt wird, so dass letztere (abgesehen von solchen Belastungszuständen, wobei die bewegliche Last bis zu den Zwischenpunkten zwischen den Stützpunkten reicht: cf. Nr. 103, Anmerkung) auch hier mit kaum geringerem Rechte, als früher sub Nr. 93, in den einzelnen Strecken

$$A C_1 = l\,; \quad C_1 C_2 = l_1\,; \quad C_2 C_3 = l_2 \ldots$$

$$\text{constant} = \quad p\,; \quad p_1\,; \quad p_2 \ldots$$

gesetzt werden kann, weil das Eigengewicht des Trägers selbst, welches neben dem constanten Gewichte der Brückenbahn und der zufälligen, beweglichen Last immerhin nur einen Theil von p, p_1, $p_2 \ldots$ ausmacht, zudem bis zu gewissem Grade eine Ausgleichung dadurch erfährt, dass in den mittleren Querschnitten, für welche M am grössten, zugleich $R = 0$ ist, die grössten Dimensionen und Gewichte der durch M bedingten Constructionselemente des zusammengesetzten Trägers hier also mit den kleinsten der durch R bedingten zusammentreffen; nur über den Zwischenstützen treffen Maximalwerthe von M und R zusammen, so dass die Voraussetzung einer nach wie vor in den einzelnen Strecken l, l_1, $l_2 \ldots$ gleichförmig vertheilten Belastung nur insofern etwas fehlerhaft sein wird, als die Reactionen der Zwischenstützen, insbesondere C_1 und C_n ein wenig zu klein, die Reactionen A und B der Endstützen also entsprechend zu gross gefunden werden.

Was ferner das Trägheitsmoment J betrifft, so kann dasselbe, wenn es bei der Ausführung schliesslich auch absatzweise veränderlich gemacht wird, bei der Rechnung doch stetig veränderlich vorausgesetzt werden, und zwar — entsprechend dem Ziele, welches hierbei eben angestrebt wird — der Art veränderlich, dass für jeden Querschnitt das Spannungsmoment dem Widerstandsmomente gleich ist (cf. Nr. 50), also

$$\frac{EJ}{\varrho} = k\frac{J}{e},$$

unter e den grösseren der Abstände e' und e'' verstanden, wenn $k' = k''$ gesetzt wird, oder unter k den kleineren der beiden Werthe k' und k'' verstanden, wenn $e' = e''$ ist, oder endlich unter $\frac{k}{e}$ den für denselben Querschnitt gleichen Werth $\frac{k'}{e'} = \frac{k''}{e''}$ verstanden, wenn, wie bei dem Brückenträger in der That zu fordern ist, die Querschnitte so proportionirt werden, dass die Zug- und die Druckfestigkeit des Materials gleichmässig in Anspruch genommen werden.

Daraus folgt, dass der Krümmungsradius ϱ der elastischen Linie eines solchen Trägers oder Stabes von gleichem Widerstande $= \frac{Ee}{k}$, mithin proportional der Höhe h des betreffenden Querschnitts ist; insbesondere für

$$\frac{e}{k} = \frac{e'}{k'} = \frac{e''}{k''}, \text{ also } h = e' + e'' = \frac{e}{k}(k' + k'') \text{ wird: } \varrho = \frac{Eh}{k' + k''}.$$

Werden also schliesslich noch Querschnitte von constanter Höhe vorausgesetzt, wie es bei continuirlichen Brückenträgern der Fall zu sein pflegt, so wird ϱ constant und sei dann mit r bezeichnet; die elastische Linie besteht dann aus Kreisbögen mit demselben Radius r, welche in den $M = 0$ entsprechenden Inflexionspunkten mit entgegengesetzten Krümmungen in einander übergehen. Für diesen Fall möge die oben erwähnte Gleichung $F = 0$ ermittelt werden.

105. — Dazu sind analog dem früher bei Voraussetzung eines constanten Querschnitts angewendeten Verfahren zunächst für den Fall eines beiderseits unter den Richtungswinkeln α und β befestigten und gleichförmig belasteten Stabes $AB = l$ die Spannungsmomente $[A]$ und $[B]$ der Endquerschnitte durch die Winkel α und β auszudrücken. Sind zu dem Ende X und Y (Fig. 15) die Inflexionspunkte der elastischen Linie, a, c, b die Mittelpunkte der Kreisbögen AX, XY, YB mit den gleichen Radien r, so sind bei übrigens denselben Bezeichnungen, wie in Nr. 61, die Entfernungen x der Punkte X und Y vom Punkte A die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

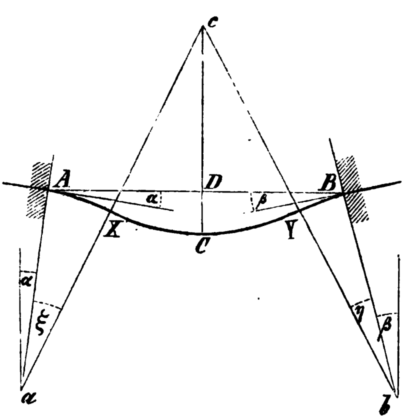


Fig. 15.

$$[A] + Ax - \frac{px^2}{2} = 0 \text{ oder } x^2 - 2\frac{A}{p}x - 2\frac{[A]}{p} = 0.$$

Wird insbesondere $AX = x$, $BY = y$ gesetzt, so ist das Product beider Wurzeln:

$$x(l-y) = -2\frac{[A]}{p}; \text{ daraus } [A] = -\frac{p}{2}x(l-y)$$

oder mit $x = r\xi$, $y = r\eta$, $l = r\lambda$:

$$[A] = -\frac{pr^2}{2}\xi(\lambda - \eta).$$

Die Winkel ξ und η sind mit Rücksicht auf Fig. 15 bestimmt durch die Gleichungen:

$$r[2\sin(\alpha+\xi) - \sin\alpha] + r[2\sin(\beta+\eta) - \sin\beta] = l$$

und $CD = 2r[1-\cos(\alpha+\xi)] - r(1-\cos\alpha) = 2r[1-\cos(\beta+\eta)] - r(1-\cos\beta)$

oder wegen der Kleinheit aller Winkel:

$$(\alpha + 2\xi) + (\beta + 2\eta) = \lambda$$

$$(\alpha+\xi)^2 - \frac{\alpha^2}{2} = (\beta+\eta)^2 - \frac{\beta^2}{2}.$$

Die Einsetzung der hieraus sich ergebenden Werthe von ξ und η in den obigen Ausdruck von $[A]$ liefert mit den Bezeichnungen:

$$\gamma = \alpha + \beta;\; \delta = \alpha - \beta:$$

$$[A] = -\frac{pr^2}{32}\,\frac{\lambda^2-\gamma^2-2\lambda\delta}{\lambda+\gamma}\left(4\lambda - \frac{\lambda^2-\gamma^2+2\lambda\delta}{\lambda+\gamma}\right).$$

Daraus folgt $[B]$ durch Vertauschung von δ mit $-\delta$. Wenn man endlich γ und δ aus diesen beiden Gleichungen für $[A]$ und $[B]$ entwickelt, so ergiebt sich auch

$$\beta = \frac{\gamma - \delta}{2}$$

als Function von $[A]$ und $[B]$, und zwar bei Wiedereinführung des Werthes $\frac{l}{r}$ für λ:

$$\beta = \frac{l}{r}\left\{-\frac{1}{2} + \left(1 - 2\frac{[A]-[B]}{pl^2}\right)\cdot\sqrt{\left(1-2\frac{[A]-[B]}{pl^2}\right)^2 + 8\frac{[A]}{pl^2}}\right\}.$$

106. — Werden nun alle Stützen als in gleicher Höhe liegend vorausgesetzt*), so erhält man, bei denselben Buchstabenbezeichnungen wie in Nr. 93, die gesuchte Beziehung zwischen den Spannungsmomenten der Querschnitte über drei aufeinander folgenden Stützen, wenn man in der für β gefundenen Gleichung

zuerst	β	p	l	$[A]$	$[B]$	
mit	$-\gamma_2$	p_1	l_1	$[C_1]$	$[C_2]$	
und dann mit	γ_2	p_2	l_2	$[C_3]$	$[C_2]$	vertauscht,

endlich beide Werthe von γ_2 einander gleich setzt; das giebt:

$$\frac{l_1}{2} - l_1\left(1-2\frac{[C_1]-[C_2]}{p_1 l_1^2}\right)\cdot\sqrt{\left(1-2\frac{[C_1]-[C_2]}{p_1 l_1^2}\right)^2 + 8\frac{[C_1]}{p_1 l_1^2}} =$$

$$= -\frac{l_2}{2} + l_2\left(1+2\frac{[C_2]-[C_3]}{p_2 l_2^2}\right)\cdot\sqrt{\left(1+2\frac{[C_2]-[C_3]}{p_2 l_2^2}\right)^2 + 8\frac{[C_3]}{p_2 l_2^2}}.$$

Bei grösserer Zahl von Stützen ist freilich auch diese Relation nicht bequem zu gebrauchen; bei wenigen Stützen, d. i. dem gewöhnlich vorkommenden Falle, kann sie jedoch unter Umständen gute Dienste leisten.

107. — Sind z. B. nur 3 Stützen vorhanden, also eine Zwischenstütze C ausser den Endstützen A und B, so hat man wegen $[A] = [B] = 0$ zur Berechnung von $[C]$ die quadratische Gleichung:

$$\left(\frac{1}{p^2 l^3} + \frac{1}{p_1^2 l_1^3}\right)\cdot[C]^2 + \left(\frac{1}{pl} + \frac{1}{p_1 l_1}\right)\cdot[C] + \frac{l+l_1}{8} = 0,$$

von deren 2 negativen Wurzeln die eine absolut genommen kleiner, die an-

*) Ungleiche Höhen wären hier in der That ohne Nutzen, während bei constantem Querschnitte möglichste Gleichwerthigkeit der relativen Bruchquerschnitte dadurch angestrebt werden kann: cf. Nr. 91.

dere grösser als $\frac{p l^2}{2}$ und $\frac{p_1 l_1^2}{2}$ ist; nur die erstere hat praktische Bedeutung. Mit $[C]$ findet man:

$$A = \frac{pl}{2} + \frac{[C]}{l}; \; B = \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{[C]}{l_1}$$

und damit die Schubkraft und das Spannungsmoment für jeden beliebigen Querschnitt.

Wäre insbesondere $l = l_1$ und $p = p_1$, so wäre

$$[C] = \frac{pl^2}{2}\left(-1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -0{,}1464\ldots pl^2,$$

mithin absolut genommen ungefähr im Verhältnisse 7 : 6 grösser, als bei constantem Querschnitte, d. h. als $\frac{pl^2}{8} = 0{,}125\, pl^2$.

108. — Bei 4 symmetrisch angeordneten Stützen $A\, C_1\, C_2\, B$ und bei symmetrischer Belastung, d. h. für

$$l = l_2 \text{ und } p = p_2$$

sind die gleichen Spannungsmomente $[C_1]$ und $[C_2]$, welche mit $[C]$ bezeichnet sein mögen, wenn zudem

$$[C] = -x\frac{pl^2}{2}$$

gesetzt wird, bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{l + l_1}{2} - l(1-x)^2 = l_1 \sqrt{1 - 4\frac{pl^2}{p_1 l_1^2}x}$$

oder

$$x^4 - 4x^3 + \left(4 - \frac{l_1 - l}{l}\right)x^2 + 2\left(\frac{l_1 - l}{l} + 2\frac{p}{p_1}\right)x - \frac{(l + l_1)(3l_1 - l)}{4l^2} = 0.$$

Nur die positive Wurzel x, welche $< \frac{1}{4}\frac{p_1 l_1^2}{pl^2}$ ist, hat praktische Bedeutung.

Insbesondere für $l = l_1$ und $p = p_1$ erhält man:

$$x = 0{,}2136; \; [C] = -0{,}1068\, pl^2$$

statt $-0{,}1\, pl^2$ bei constantem Querschnitte.

109. — Schliesslich muss in Betreff eines der Biegung unterworfenen Stabes von veränderlichem Querschnitte ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, dass alle Gesetze dieses Capitels unter der Voraussetzung einer vor Eintritt der Biegung von den Richtungslinien der äusseren Kräfte rechtwinkelig geschnittenen geraden Mittellinie entwickelt sind, und dass also, wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, jene Gesetze nur mehr oder weniger angenähert zutreffen. Wenn z. B. ein aus einer verticalen Wand hervorstehender, durch Schwerkräfte zu belastender, consolartiger Träger von rechteckigem verticalen Querschnitte oben durch eine horizontale Ebene begrenzt ist, so ist bei einer geneigten Ebene als unterer Begrenzung zwar die Mittellinie noch gerade, aber nicht mehr

horizontal, also auch nicht senkrecht zur Richtung der äusseren Kräfte würde gar die untere Begrenzung durch eine krumme cylindrische Fläche gebildet, so würde auch die Mittellinie eine krumme Linie. Wenn nun auch in beiden Fällen die durch die Belastung hervorgerufenen Spannungen gewöhnlich nach den Regeln dieses Capitels beurtheilt werden, so kann es doch immerhin nur mit einem geringeren Grade von Zuverlässigkeit geschehen, als wenn der beispielsweise betrachtete (von der Kraftebene stets symmetrisch geschnittene) Träger oben und unten durch dieselben Cylinderflächen begrenzt wird von symmetrischer Lage gegen eine horizontale Ebene, in welcher somit die gerade Mittellinie liegt.

Aber selbst wenn die Bedingung einer zur Kraftrichtung senkrechten geraden Mittellinie erfüllt ist, kann doch die den Rechnungen dieses Capitels durchweg zu Grunde liegende Voraussetzung, dass mit der Biegung nur solche innere Zug- und Druckkräfte verbunden seien, welche senkrecht gegen die Flächenelemente der Querschnitte gerichtet sind, bei veränderlichem Querschnitte nicht mehr genau zutreffen. In der That werden im Umfange eines Querschnitts jene inneren Kräfte tangential an diejenigen Curven gerichtet sein, in welchen die Oberfläche des Stabes von einem durch seine gerade Mittellinie gelegten Ebenenbüschel geschnitten wird, und werden von dort aus nach dem Schwerpunkte des Querschnitts hin sich jene Richtungen nur allmählig derjenigen der Mittellinie nähern; mit anderen Worten, es müssten die zur Mittellinie senkrechten ebenen Querschnitte durch krumme Flächen ersetzt werden, welche sowohl die Mittellinie, als auch jene vorgenannten Durchschnittscurven auf der Oberfläche des Stabes rechtwinkelig schneiden, um nach wie vor mit demselben Rechte annehmen zu dürfen, dass in allen Flächenelementen nur normale Spannungen stattfinden.

Zu einer rechnungsmässigen Rücksichtnahme auf den hier hervorgehobenen Umstand, resp. zu einer Correction der bisher entwickelten Formeln liegt indessen bei einfachen massiven Stäben, wie solche im Maschinenbau vorzugsweise vorkommen, sowie auch in allen denjenigen Fällen ein praktisches Bedürfniss nicht vor, wo auch schon von dem Einflusse der auf Verschiebung der Querschnitte wirkenden Kräfte ohne in Betracht kommenden Fehler abstrahirt wird. Nur bei zusammengesetzten, insbesondere Brückenträgern, bei denen die den Kraftmomenten M entsprechenden Spannungen in grösster Entfernung von der Biegungsaxe, nämlich in den Gurtungen concentrirt und ebenso wie diese gerichtet sind, kommt es wesentlich in Betracht, kann es dann aber auch verhältnissmässig leicht in Rechnung gebracht werden, dass, wenn der veränderliche Querschnitt mit einer veränderlichen Höhe verbunden ist, jene Gurtungen und folglich deren Spannungen unter veränderlichen Winkeln gegen die Mittellinie des Trägers gerichtet sind.

b. Körper von gleichem Widerstande.

110. — Im Folgenden sind für die beiden Fälle, dass der stabförmige Körper entweder an einem Ende befestigt, am anderen frei, oder dass er an beiden Enden unterstützt ist, die Regeln zusammengestellt, nach welchen er für einige besondere, einfache Belastungsarten und Querschnittsformen als sogenannter Körper von gleichem Widerstande hergestellt werden kann, d. h. nach welchen gewisse Querdimensionen veränderlich gemacht werden müssen, damit in allen Querschnitten zugleich die Maximalspannung $\sigma' = k'$ oder die Maximalpressung $\sigma'' = k''$ $\left(\text{jenachdem } \frac{\sigma'}{k'} \gtrless \frac{\sigma''}{k''}\right)$, oder noch besser zugleich $\sigma' = k'$ und $\sigma'' = k''$ sei. Dieser Forderung wird entsprochen, wenn für alle Querschnitte

$$\frac{Me}{J} = k$$

gemacht wird, unter $\frac{e}{k}$ das grössere der beiden Verhältnisse $\frac{e'}{k'}$ und $\frac{e''}{k''}$ resp. jedes dieser beiden gleichen Verhältnisse verstanden.

Ausser den Bemerkungen unter Nr. 109 ist dabei noch zu beachten, dass, wenn hiernach gewisse Querschnitte unendlich klein gemacht werden dürften, dieselben doch in Wirklichkeit schon deswegen eine endliche Grösse erhalten müssen, weil die in diesem Capitel stets vernachlässigte Schubkraft R einen verhältnissmässig um so grösseren Einfluss ausübt, je kleiner M ist, dass sie also vorzugsweise oder selbst allein massgebend wird, wo M sehr klein oder gar $= 0$ ist*).

1. Der Körper AB ist einerseits (bei A) befestigt, anderseits frei.

α. Belastung am freien Ende B durch die Kraft P.

111. — Ist der Querschnitt ein Rechteck von constanter Breite b, so sind dessen Höhen h bei A, sowie y in der Entfernung x von B bestimmt durch:

$$h = \sqrt{\frac{6Pl}{kb}};\ \frac{y^2}{h^2} = \frac{x}{l}.$$

Für Körper von Gusseisen ist diese parabolische Form zwar leicht herzustellen und zweckmässig (bis auf die nöthige Zugabe an Höhe bei B: cf. Nr. 110), für Körper von Schmiedeeisen oder Holz wird sie aber angemessener Weise durch eine Trapezform des Längenprofils ersetzt, etwa so, dass für $x = \frac{1}{4}\,l$ die Höhe $y = \frac{1}{2}\,h$ gemacht wird, wodurch in Ver-

*) Wegen der betreffenden Correction siehe das vierte Capitel, insbesondere Nr. 179 bis 181.

bindung mit $y = h$ für $x = l$ das Trapez bestimmt ist. Freilich wird dann auf $^3/_4$ der Länge, von A aus gerechnet, der Körper etwas schwächer, als er sein sollte; um dies eben zu vermeiden, müsste die Höhe bei $B = \frac{1}{2}h$ gemacht werden.

Bei Voraussetzung der vollkommen parabolischen Form des Längenschnitts ergiebt sich die Durchbiegung am Ende B:

$$\delta = \frac{8Pl^3}{Ebh^3}$$

d. i. doppelt so gross, als sie unter sonst gleichen Umständen bei constanter Höhe h sein würde.

112. — Ist der Querschnitt ein Rechteck von constanter Höhe h, so sind dessen Breiten b bei A, sowie y in der Entfernung x von B bestimmt durch:

$$b = \frac{6Pl}{kh^2};\ \frac{y}{b} = \frac{x}{l},$$

entsprechend einem Dreieck als Horizontalschnitt, welches aber der vernachlässigten Schubkräfte wegen durch ein Trapez auf derselben Grundlinie b bei A zu ersetzen ist.

Bei Voraussetzung der vollkommenen Dreiecksform des Horizontalschnitts findet man die Durchbiegung am Ende B:

$$\delta = \frac{6Pl^3}{Ebh^3}$$

d. h. 1,5 Mal so gross, als sie unter sonst gleichen Umständen bei constanter Breite b sein würde. Die elastische Linie ist hier ein Kreisbogen (cf. Nr. 104).

Sollten abgesehen von den Verstärkungen bei B die in dieser und der vorigen Nr. bestimmten Körper gleiches Volumen erhalten, so müsste b dort und h hier so angenommen werden, dass

$$bh^2 = \frac{27\,Pl}{8\,k}$$

ist.

113. — Wenn alle Querschnitte einer gegebenen Figur ähnlich sein sollen (z. B. einem Rechtecke von gegebenem Seitenverhältnisse, einer Ellipse von gegebenem Axenverhältnisse, insbesondere einem Kreise etc.), so sind durch eine einzige Dimension eines Querschnitts alle übrigen Dimensionen desselben bestimmt. Ist y der Werth dieser bestimmenden homologen Dimension für den Querschnitt in der Entfernung x vom Angriffspunkte B der Kraft P, und a derselbe für den Querschnitt bei A, d. h. für $x = l$, so ist:

$$a = \sqrt[3]{\frac{Pl}{km}};\ \frac{y^3}{a^3} = \frac{x}{l}.$$

Dabei ist m von der Querschnittsform abhängig, nämlich $m = \frac{J}{ey^3}$; z. B. für ähnliche rechteckige Querschnitte:

$$m = \frac{\text{Breite}}{6 \times \text{Höhe}},$$

für kreisförmige Querschnitte (Umdrehungskörper):

$$m = \frac{\pi}{4}.$$

Sofern übrigens eine solche Körperform weder leicht herzustellen, noch von gefälligem Ansehen ist, auch am Ende B ohnehin wieder einer Zugabe an Stärke bedarf, so kann sie durch eine andere von derselben Form des Querschnitts, aber constanter Verjüngung, d. h. durch eine abgekürzte Kegelform ersetzt werden, etwa so, dass für $x = \frac{1}{8} l$ die bestimmende Dimension $y = \frac{1}{2} a$ gemacht wird. Freilich wird dann der Körper auf $^7/_8$ seiner Länge, von A aus gerechnet, etwas schwächer, als er sein sollte; um dies zu vermeiden, müsste das Verjüngungsverhältniss $\frac{dy}{dx}$ constant $=$ demjenigen gemacht werden, welches bei der theoretischen Form gleicher Festigkeit für $x = l$ stattfindet, was dadurch geschieht, dass für $x = 0$, d. h. bei B: $y = \frac{2}{3} a$ gemacht wird.

β. Gleichförmig auf der ganzen Länge l vertheilte Belastung $= pl$.

114. — Wird dabei ein rechteckiger Querschnitt von constanter Breite b vorausgesetzt, so ergiebt sich dessen Höhe h am Ende A, sowie die Höhe y in der Entfernung x von B:

$$h = l\sqrt{\frac{3p}{kb}};\ \frac{y}{h} = \frac{x}{l}.$$

Eine Verstärkung am Ende B ist hier kaum nöthig, weil die Schubkraft R zusammen mit dem Spannungsmomente M nur allmählig von B gegen A wächst.

2. Der Körper AB ist beiderseits unterstüzt.

α. Belastung durch eine in einem Punkte C concentrirte Last P.

115. — Beide Theile AC und BC des Körpers verhalten sich wie wenn sie bei C befestigt und bei A resp. B durch eine Kraft $=$ dem Stützendrucke angegriffen würden; ihre der Aufgabe entsprechenden Formen sind deshalb nach den obigen Regeln sub 1,α zu bestimmen.

Namentlich sind die Endstücke von Wellen, welche nur zu tragen haben, wie z. B. eine Balancierwelle oder die Welle eines Wasser-

rades, dessen Arbeit durch einen unmittelbar mit ihm verbundenen Zahnkranz fortgeleitet wird, nach der Regel unter Nr. 113 zu gestalten, sofern hier die Querschnitte alle unter sich ähnlich, insbesondere kreisförmig sein sollen. Der anderweitig zu bestimmende Zapfendurchmesser begrenzt dabei die zulässige Verjüngung nach Aussen hin.

116. — Wenn die Last P beweglich wäre, so dass ihr Angriffspunkt C jede Lage zwischen A und B annehmen kann, so ist es zwar nicht mehr möglich, dass bei jeder Lage in jedem Querschnitte

$$\frac{Me}{J} = k$$

ist; allein es lässt sich dann der Forderung entsprechen, dass diese Gleichung in dem jedesmaligen Bruchquerschnitte, d. h. im jedesmaligen Querschnitte C erfüllt sein soll.

Wird z. B. ein rechteckiger Querschnitt von constanter Breite b angenommen, so muss zu dem Ende, wenn die Lange $AB = 2a$ gesetzt wird, die Höhe h in der Mitte:

$$h = \sqrt{\frac{3Pa}{kb}}$$

gemacht werden, wonach die Höhe y im Abstande x von der Mitte bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1;$$

d. h. sie ist = der betreffenden Ordinate einer Ellipse mit den Halbaxen a und h.

β. Gleichförmig auf der ganzen Länge AB = 2a vertheilte Belastung.

117. — Bei Voraussetzung eines rechteckigen Querschnitts von constanter Breite b sind dessen Höhen h und y in der Mitte des Körpers und in der Entfernung x von der Mitte bestimmt durch:

$$h = a\sqrt{\frac{3p}{kb}}; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1.$$

Dieser Körper ist bei gleichen Werthen von a, b und k identisch mit dem unter Nr. 116 bestimmten, wenn $P = pa$ ist.

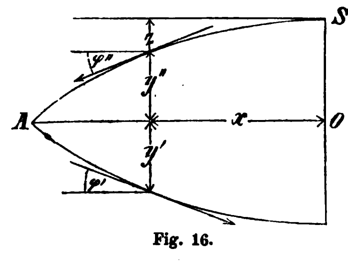


Fig. 16.

118. — Der Träger bestehe aus 2 bogenförmigen flachen Gurten mit constanten Querschnitten F' und F'', welche durch Streben so verbunden sind, dass ihre vertical gemessene gegenseitige Entfernung von den Stützpunkten A und B gegen die Trägermitte hin wächst. (Fig. 16.) Die Dicke der Gurte, längs der Biegungsebene

gemessen, sei so klein, dass ohne in Betracht kommende Fehler die Spannung des unteren und die Pressung des oberen Gurts als gleichförmig in den Querschnitten F' resp. F'' vertheilt, mithin auch als in den bogenförmigen Mittellinien concentrirt anzusehen sind; y' und y'' seien die der Abscisse x entsprechenden Ordinaten dieser Mittellinien für den Mittelpunkt O der Horizontalen AB als Anfangspunkt und OA als x-Axe. Beide Curven, sowie die Querschnitte F' und F'' sollen so bestimmt werden, dass die Spannung des unteren Gurts überall $= k'$, die Pressung des oberen überall $= k''$ ist.

Sind φ' und φ'' die Winkel, unter denen die Curven in den Punkten x, y' und x, y'' gegen die x-Axe geneigt sind, so entsprechen jener Forderung die Gleichungen:

$$F'k'\cos\varphi' = F''k''\cos\varphi''$$

$$F'k'\cos\varphi'(y' + y'') = \frac{p}{2}(a^2 - x^2),$$

wodurch die Aufgabe noch nicht bestimmt ist, so dass noch eine Beziehung zwischen beiden Curven anzunehmen ist, welche nach der ersten Gleichung nur in einem constanten Verhältnisse von $\cos\varphi'$ zu $\cos\varphi''$ bestehen kann; auch muss für eine von beiden Curven noch ein Punkt ausser A sowie die Richtung der Tangente in demselben gegeben sein.

Es seien z. B. beide Curven congruent, also

$$\varphi' = \varphi'' = \varphi; \; y' = y'' = y$$

und für $x = 0$ gegeben: $\varphi = 0; y = h$.

Dann wird:

$$F' = \frac{pa^2}{4k'h}; \; F'' = \frac{pa^2}{4k''h}$$

$$y\cos\varphi = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Hiernach kann die Curve durch successive Näherung construirt werden, indem man als erste Annäherung die Curve:

$$y_1 = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

construirt, dann, wenn für diese der Winkel φ mit φ_1 bezeichnet wird, als zweite Annäherung die Curve:

$$y_2 = \frac{y_1}{\cos\varphi_1}$$

und, wenn für diese der Winkel φ mit φ_2 bezeichnet wird, als dritte Annäherung:

$$y_3 = \frac{y_1}{\cos\varphi_2} \text{ u. s. f.}$$

Uebrigens entspricht der ersten Annäherung eine Parabel mit dem Scheitel S, der Axe SO und der Gleichung:

$$\frac{z_1}{h} = \frac{x^2}{a^2},$$

wenn $h - y_1 = z_1$ gesetzt wird. Die der zweiten Annäherung entsprechende Curve kann näherungsweise dargestellt werden durch die Gleichung:

$$\frac{z_2}{h} = \frac{x^2}{a^2}\left[1 - 2\frac{h^2}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right]; \; z_2 = h - y_2.$$

Obige Aufgabe enthält das Princip der Brückenträger nach Pauli's System, abgesehen von dem Einflusse der Schubkräfte und der entsprechenden Wirkung der die Gurte verbindenden Streben.

B. Die Richtungslinien der äusseren Kräfte liegen in verschiedenen Ebenen oder in einer Ebene, welche nicht Symmetrieebene des geraden stabförmigen Körpers ist.

119. — Die elastische Linie ist im Allgemeinen doppelt gekrümmt; wenigstens fällt, wenn sie auch einfach gekrümmt ist, ihre Ebene im Allgemeinen nicht mit der Kraftebene oder die Biegungsaxe irgend eines Querschnitts nicht mit der Axe des resultirenden Paares M der äusseren Kräfte für diesen Querschnitt zusammen. Ist die Axe sowie die Grösse von M gegeben, so kommt es darauf an, zunächst die Lage der Biegungsaxe, demnächst den entsprechenden Krümmungsradius ϱ (Radius der ersten Krümmung) der elastischen Linie und endlich die Spannung σ für einen beliebigen Punkt des betreffenden Querschnitts zu finden.

Letzterer werde bezogen auf seine Hauptaxen OY und OZ für den Schwerpunkt O (Fig. 17), welche in solchem Sinne positiv genommen sein sollen, dass die Axe einer im Sinne YZ stattfindenden Drehung nach demjenigen Körpertheile hin gerichtet ist, dessen System von äusseren Kräften bei ihrer Versetzung an den Punkt O das Kräftepaar M liefert. OA sei die Axe, welche dieses Kräftepaar in Beziehung sowohl auf die Lage seiner Ebene, als den Sinn seiner Drehung darstellt; sie bilde mit OY den Winkel α, während β der Winkel zwischen OY und der Biegungsaxe OB ist.

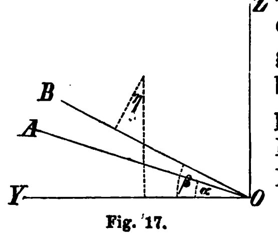


Fig. 17.

Die zu Anfange dieses Capitels bis Nr. 41 incl. erörterten Voraussetzungen werden auch hier beibehalten, und ist deshalb nach Nr. 41 und mit Rücksicht auf Fig. 17 in einem beliebigen Punkte des Querschnitts im Abstande η von der Biegungsaxe OB:

$$\sigma = E\left(\varepsilon_0 + \frac{\eta}{\varrho}\right) = E\left(\varepsilon_0 + \frac{z\cos\beta - y\sin\beta}{\varrho}\right).$$

An die Stelle der zwei Gleichgewichtsbedingungen sub Nr. 43 treten aber jetzt die folgenden drei, unter dF ein unendlich kleines Flächenelement 2ter Ordnung des Querschnitts verstanden:

$$\int\sigma\,dF = 0; \quad \int\sigma\,dF.z = M\cos\alpha; \quad \int\sigma\,dF.y = -M\sin\alpha.$$

Aus diesen Gleichungen in Verbindung mit dem obigen Ausdrucke von σ folgt, wenn mit

$$Y = \int z^2 dF; \quad Z = \int y^2 dF$$

die Trägheitsmomente des Querschnitts für die Hauptaxen OY und OZ bezeichnet werden, ausser $\varepsilon_0 = 0$, entsprechend dem Zusammenfallen der Biegungsaxe mit der neutralen Axe:

$$\frac{\cos\beta}{\varrho} = \frac{M\cos\alpha}{EY}; \quad \frac{\sin\beta}{\varrho} = \frac{M\sin\alpha}{EZ}$$

$$\frac{tg\beta}{tg\alpha} = \frac{Y}{Z}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E}\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{Y^2} + \frac{\sin^2\alpha}{Z^2}}$$

$$\sigma = M\left(\frac{z\cos\alpha}{Y} - \frac{y\sin\alpha}{Z}\right).*)$$

120. — Mit $\alpha = 0$ oder $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ gehen diese Formeln über in:

$$\beta = \alpha$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EY} \text{ resp. } \frac{M}{EZ}$$

$$\sigma = \frac{Mz}{Y} \text{ resp. } \frac{My}{Z}$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 43; die dem Hauptabschnitte dieses Capitels sub A. zu Grunde liegende Voraussetzung, dass die äusseren Kräfte in einer Ebene liegen, welche den Körper symmetrisch theilt, kann sonach dahin erweitert werden kann, dass die Kraftebene der Ort des einen oder des andern der beiden Systeme von Schwerpunktshauptaxen aller Querschnitte sei.

Ist $Y = Z$, so ist immer auch $\beta = \alpha$; in der That hat dann jede durch O gezogene Gerade in der Ebene des Querschnitts den Charakter einer Hauptaxe desselben, und zwar mit dem nämlichen Trägheitsmomente $Y = Z$.

Ist $Y > Z$, so ist Z überhaupt das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts für irgend eine Axe, und eine Biegung um OZ als Biegungsaxe ist mit dem kleinstmöglichen Widerstande verbunden. Nennt man deshalb OZ die Axe der leichtesten Biegung, so kann man sagen:

Wenn die Axe des Paares M nicht mit einer Hauptaxe für den Schwerpunkt des Querschnitts zusammenfällt, so liegt die betreffende Biegungsaxe zwischen ihr und der Axe der leichtesten Biegung, und zwar der letzteren um so näher, je mehr

---

*) Die Ableitung dieser Gleichungen beruht darauf, dass

$$\int y\,dF = 0; \int z\,dF = 0; \int yz\,dF = 0$$

ist, welche Gleichungen den Schwerpunkt und die Hauptaxen charakterisiren.

die Hauptträgheitsmomente Y und Z verschieden sind. Hat der Querschnitt eine sehr längliche Form, so können Y und Z so sehr verschieden sein, dass β nahe $= \frac{\pi}{2}$, obgleich α nahe $= 0$ ist.

121. — Die grösste Spannung

$$\sigma' = M.\ max. \left(\frac{z \cos \alpha}{Y} - \frac{y \sin \alpha}{Z}\right)$$

und die grösste Pressung

$$\sigma'' = M.\ max. \left(\frac{y \sin \alpha}{Z} - \frac{z \cos \alpha}{Y}\right)$$

finden in denjenigen Punkten des Umfangs statt, welche von der Biegungsaxe:

$$\frac{z \cos \alpha}{Y} - \frac{y \sin \alpha}{Z} = 0$$

auf der einen und der andern Seite am weitesten entfernt sind. Beide Maximalwerthe σ' und σ'' ändern sich im Allgemeinen von einem zum andern Querschnitte, und zwar nicht nur mit M, sondern, wenn die Richtungslinien der äusseren Kräfte in verschiedenen Ebenen liegen, zugleich mit α, in welchem Falle selbst bei gleichen und gleich gelegenen Querschnitten, d. h. bei prismatischer Form des Körpers, die Punkte grösster Spannung und Pressung in den verschiedenen Querschnitten verschieden liegen und ihre Oerter auf der Oberfläche des Körpers zwei krumme Linien bilden können.

Wenn die secundären äusseren Kräfte, d. h. die Widerstandskräfte der Stützpunkte, unabhängig von der Biegung durch die Bestimmungsstücke der primären äusseren Kräfte ausgedrückt werden können, so lässt sich eins der letzteren oder eine Dimension des Körpers ohne Weiteres so bestimmen, dass die Maximalwerthe von σ' und σ'' in irgend einem Querschnitte höchstens = gegebenen Werthen k' resp. k'' werden. Es ist dies der Fall, wenn der Körper an einem Ende befestigt und übrigens frei, oder wenn er in zwei Punkten unterstützt ist.

122. — Ist z. B. der Querschnitt eine Ellipse mit den Halbaxen b und c in OY und OZ, so ist

$$tg\,\beta = \frac{c^2}{b^2} tg\,\alpha,$$

woraus folgt, dass die Biegungsaxe OB in den Durchmesser fällt, welcher dem zur Axe OA senkrechten Durchmesser, d. h. dem Schnitt der Ebene des Paares M conjugirt ist. Die einander gleichen Maximalwerthe σ' und σ'' finden in den Endpunkten dieses Schnitts statt und sind:

$$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \frac{4M}{\pi b^2 c^2} \sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + c^2 \sin^2 \alpha}.$$

Ist der Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten b und c parallel OY resp. OZ, so ist auch

$$tg\,\beta = \frac{c^2}{b^2} tg\,\alpha;$$

fällt z. B. der zu OA senkrechte Schnitt der Ebene des Paares M in eine Diagonale des Rechtecks, so fällt die Biegungsaxe in die andere. Die Maximalwerthe σ' und σ'' finden immer in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten statt und sind:

$$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \frac{6M}{b^2c^2}(b \cos\alpha + c \sin\alpha).$$

123. — Der Ausdruck von $\frac{1}{\varrho}$ in Nr. 119 dient zur Bestimmung der elastischen Linie, also auch zur Bestimmung der Reactionen der Befestigungs- oder Stützpunkte, wenn diese von der Biegung des Stabes abhängen, insbesondere also wenn der Letztere beiderseits befestigt, oder einerseits befestigt und andererseits gestützt, oder ausserdem noch in beliebig vielen Zwischenpunkten gestützt ist. Der erste dieser drei Fälle kann wieder als Fundamentalfall betrachtet werden, aus welchem der zweite durch Specialisirung, der dritte durch Combination abzuleiten ist; praktische Wichtigkeit haben alle diese Fälle nicht, und es möge genügen, das Verfahren der Behandlung des Fundamentalfalls nur allgemein anzudeuten.

124. — AB sei der stabförmige Körper von der Länge l, welcher an beiden Enden so befestigt ist, dass die Tangenten der elastischen Linie in ihren Endpunkten A und B gegebene Richtungen haben, welche mit der Geraden AB sehr kleine Winkel bilden. Mit A und B seien zugleich die der Grösse und Richtung nach zu bestimmenden Widerstandskräfte an den gleich bezeichneten Stabenden, mit $[A]$ und $[B]$ die Spannungsmomente der Endquerschnitte bezeichnet, welche hinsichtlich ihrer Grössen und der Lagen ihrer Ebenen bestimmt werden sollen. Die Art der Belastung sei nur an die allgemeine Voraussetzung dieses Capitels gebunden (Nr. 38); die Veränderlichkeit des Querschnitts wird nur durch die Voraussetzung beschränkt, dass vor der Biegung die Hauptaxen der Schwerpunkte aller Querschnitte des geraden Stabes in zwei Ebenen liegen, welche in der Axe AB sich rechtwinkelig schneiden.

Diese beiden Ebenen und die im Punkte A zu ihrer Durchschnittslinie AB senkrechte Ebene seien die Coordinatenebenen, AB die x-Axe, AY_0 und AZ_0 die beiden anderen Axen, worauf die Lage eines beliebigen Punktes O der elastischen Linie durch seine betreffenden Coordinaten x, y_0, z_0 bezogen wird. Der sehr kleine Winkel, unter welchem die Tangente des Punktes O der elastischen Linie (genommen im Sinne der Bewegung eines die elastische Linie von A nach B durchlaufenden Punktes) gegen die x-Axe geneigt ist, habe in der Ebene XZ_0 die Projection φ_y, in der Ebene XY_0 die Projection φ_z; α_y und α_z seien die gegebenen Werthe dieser Winkel für $x = 0$, d. h. im Punkte A, β_y und β_z dieselben für $x = l$, d. h. im Punkte B; alle diese Winkel werden positiv oder negativ gesetzt, jenachdem sie von dem mit der x-Axe gleich gerichteten Schenkel aus gerechnet nach der Seite der positiven oder negativen Axe AZ_0 resp. AY_0 liegen.

Ist nun $d\varphi$ der Contingenzwinkel der elastischen Linie im Punkte O, so ist mit sehr kleinem Fehler

$$d\varphi = \frac{ds}{\varrho} = \frac{dx}{\varrho},$$

und wenn man diese unendlich kleine Verdrehung $d\varphi$ um die Biegungsaxe des betreffenden Querschnitts in zwei dergleichen um die Hauptaxen OY und OZ dieses Querschnitts zerlegt denkt, nämlich (Fig. 17):

$$d\varphi_y = d\varphi \,.\, \cos\beta = \frac{dx}{\varrho} \cos\beta \text{ um } OY$$

$$\text{und } d\varphi_z = -\,d\varphi \,.\, \sin\beta = -\,\frac{dx}{\varrho} \sin\beta \text{ um } OZ,$$

so ergiebt sich sofort:

$$\varphi_y - \alpha_y = \int_0^x \frac{dx}{\varrho} \cos\beta$$

$$\varphi_z - \alpha_z = -\int_0^x \frac{dx}{\varrho} \sin\beta.$$

Wäre der Punkt A nicht fest, so würde er

vermöge $d\varphi_y$ um die Strecke $x\,.\,d\varphi_y$ nach der Richtung $Z_0 A$,
" $d\varphi_z$ " " " $x\,.\,d\varphi_z$ " " " $Y_0 A$

von der Tangente des Punktes O sich entfernen; in der That entfernt sich umgekehrt der Punkt O von der Tangente des Punktes A

$$\text{um } x\,.\,d\varphi_y = \frac{x\,dx}{\varrho} \cos\beta \text{ nach der Richtung } AZ_0$$

$$\text{und " } x\,.\,d\varphi_z = -\,\frac{x\,dx}{\varrho} \sin\beta \text{ " " " } AY_0.$$

Daraus ergiebt sich:

$$z_0 - x\,\alpha_y = \int_0^x \frac{x\,dx}{\varrho} \cos\beta$$

$$y_0 - x\,\alpha_z = -\int_0^x \frac{x\,dx}{\varrho} \sin\beta.$$

In diesen Gleichungen ist nach No. 119:

$$\frac{\cos\beta}{\varrho} = \frac{M\cos\alpha}{EY}; \quad \frac{\sin\beta}{\varrho} = \frac{M\sin\alpha}{EZ}$$

und weil für $x = l$ gegeben ist:

$$\varphi_y = \beta_y; \quad \varphi_z = \beta_z; \quad z_0 = 0; \quad y_0 = 0,$$

so erhält man die 4 Gleichungen:

$$\beta_y = \alpha_y + \frac{1}{E}\int_0^l \frac{M\cos\alpha}{Y}\,dx$$

$$\beta_z = \alpha_z - \frac{1}{E}\int_0^l \frac{M \sin\alpha}{Z} dx$$

$$0 = l\alpha_y + \frac{1}{E}\int_0^l \frac{M \cos\alpha}{Y} x dx,$$

$$0 = l\alpha_z - \frac{1}{E}\int_0^l \frac{M \sin\alpha}{Z} x dx,$$

woraus die in den Ausdrücken von $M\cos\alpha$ und $M\sin\alpha$ vorkommenden 4 unbekannten Grössen, nämlich A, $[A]$ und die 2 Winkel, wodurch die Richtung von A und die Richtung der Ebene von $[A]$ bestimmt sind, sich finden lassen. Die entsprechenden 4 Unbekannten für das andere Stabende findet man dann aus den Bedingungen des Gleichgewichts aller äusseren Kräfte am ganzen Körper.

DRITTES CAPITEL.

Zusammengesetzte Biegungs-Elasticität und Festigkeit.

125. — Es wird hierunter der Fall verstanden, in welchem die äusseren Kräfte sich für jeden Querschnitt des stabförmigen Körpers durch eine resultirende Kraft P und durch ein resultirendes Kräftepaar M ersetzen lassen so, dass der Querschnitt sowohl in seinem Schwerpunkte von der Richtungslinie der Kraft P, als auch von der Ebene des Paares M rechtwinkelig geschnitten wird. Die Wirkung der in die Ebene des Querschnitts fallenden Kraft R, von welcher freilich das Kräftepaar M im Allgemeinen unvermeidlich begleitet ist, wird hier wie im vorigen Capitel ausser Acht gelassen (cf. Nr. 37).

Die Voraussetzung des vorigen Capitels (Nr. 38), dass die Richtungslinien der äusseren Kräfte die Mittellinie des Körpers schneiden, muss auch hier beibehalten werden, dagegen darf das Schneiden unter beliebigem Winkel, selbst unter dem Winkel = Null stattfinden. Es wird also nur vorausgesetzt, dass die Richtungslinie jeder äusseren Kraft mit jeder Tangente der Mittellinie in einer Ebene liege; letztere muss deshalb nicht mehr nothwendig eine gerade Linie, sondern sie darf auch eine ebene Curve sein, sofern nur in diesem Falle alle äusseren Kräfte in derselben Ebene, nämlich in der Ebene der einfach gekrümmten Mittellinie liegen.

Die Bezeichnungen: elastische Linie und Biegungsfläche, Biegungsaxe und elastische Fläche haben hier dieselben Bedeutungen wie im vorigen Capitel; auch wird hier wie dort im Allgemeinen vorausgesetzt, dass die Deformation sehr gering sei der Art, dass alle Tangenten der elastischen Linie mit den entsprechenden Tangenten der ursprünglichen Mittellinie sehr kleine Winkel bilden, sowie auch, dass die materiellen Querschnitte beständig eben und zur elastischen Linie senkrecht bleiben. (Cf. Nr. 38 und 40.)

A. Gerader stabförmiger Körper.

126. — Wenn man jede äussere Kraft, deren Richtungslinie nach der Voraussetzung mit der Axe des Stabes in je einer Ebene liegt, an ihrem in oder ausserhalb der Axe liegenden Angriffspunkte in je zwei Componenten zerlegt, wovon die eine die Axe rechtwinkelig schneidet, die andere mit ihr zusammenfällt oder parallel ist, so kann man die Spannung, welche vermöge des ersten Systems von Kräften in irgend einem Punkte nach der zum Querschnitte senkrechten Richtung hervorgerufen wird, nach dem vorigen Capitel berechnen, zu welcher dann die vermöge des zweiten Systems von Kräften in demselben Punkte nach derselben Richtung verursachte Spannung nur algebraisch addirt zu werden braucht, um die resultirende Spannung daselbst zu erhalten.

Es wird deshalb hier die Untersuchung auf die Voraussetzung beschränkt, dass überhaupt nur das zweite System von Kräften vorhanden sei, und weil zudem deren Wirkungen, sofern es sich nur um die resultirenden Spannungen handelt, bei Voraussetzung einer sehr geringfügigen Biegung sich wiederum nur einfach addiren, so wird die Aufgabe weiter darauf beschränkt, dass der Stab nur durch eine einzige Kraft P angegriffen wird, deren Richtungslinie mit seiner vor der Biegung geraden Axe parallel ist, wobei die beiden Fälle zu unterscheiden sind, ob der Angriffspunkt der Kraft ausserhalb der elastischen Linie oder in der derselben liegt. Ersterer Fall möge als excentrische Zug- oder Druckbelastung bezeichnet werden; letzterer, welcher als Grenzfall des ersteren betrachtet werden kann, gehört überhaupt nur unter der Voraussetzung hierher, dass die Kraft P als Druck wirkt und bei grösserer Länge des Stabes eine Biegung desselben verursacht, und es hat dann dieser Fall mit Rücksicht auf die Art des schliesslich herbeigeführten Bruchs den Namen der Zerknickungsfestigkeit erhalten.

Von dem Eigengewicht des Stabes darf hier immer abgesehen werden.

I. Excentrische Zug- oder Druckbelastung eines geraden Stabes von constantem Querschnitte.

127. — AB sei die Mittellinie des Stabes, AX die feste gerade Linie, mit welcher sie vor der Belastung zusammenfällt, D der Angriffspunkt der belastenden Kraft P. Wenn die Mittellinie AB als elastische Linie sich krümmt, so soll doch die Richtungslinie von P beständig parallel AX bleiben und der Punkt D stets dieselbe Lage in der durch ihn ursprünglich hindurchgehenden Querschnittsebene, insbesondere also auch einen unveränderlichen Abstand p von dem Schwerpunkte dieses Querschnitts, d. h. von der Mittellinie AB behalten.

Wenn der Angriffspunkt D nicht in einer der beiden Ebenen H und H_1 läge, welche, in der Axe AX des noch geraden Stabes sich rechtwinkelig

schneidend, die Schwerpunktshauptaxen aller Querschnitte desselben enthalten, so würde die Biegungsaxe irgend eines Querschnitts nicht mit der Axe des von der Belastung herrührenden Kräftepaares M zusammenfallen (cf. Nr. 119), und wenn zudem die Ausweichungen der Punkte der elastischen Linie aus der Geraden AX nicht etwa sehr klein im Vergleich mit p wären, so würde mit der Axe des Paares M zugleich auch die Biegungsaxe in den verschiedenen Querschnitten eine merklich verschiedene Lage erhalten, somit die elastische Linie eine Curve von doppelter Krümmung werden können.

Hier wird vorausgesetzt, die Ebene DAX falle, sofern nicht etwa die Hauptträgheitsmomente Y und Z der Querschnitte (Nr. 119) gleich gross sind, mit einer der beiden Ebenen H und H_1 zusammen, sei also in der Regel eine Symmetrieebene des Stabes; dann ist die elastische Linie eine ebene Curve, und es fällt ihre Ebene, die Biegungsebene, mit der Kraftebene DAX zusammen.

128. — Wenn man die an den Schwerpunkt O eines Querschnitts versetzte Kraft P in zwei Componenten zerlegt, tangential und senkrecht zur elastischen Linie, so ist, da letztere nach der Voraussetzung einen sehr kleinen Winkel mit AX bildet, die erste Componente mit Vernachlässigung einer kleinen Grösse der 2[ten] Ordnung $= P$, die zweite als kleine Grösse der 1[ten] Ordnung = Null zu setzen; der durch die Vernachlässigung der Schubkräfte begangene Fehler ist deshalb hier nur dann von gleicher Ordnung mit demjenigen, welcher bei den Problemen des vorigen Capitels dadurch begangen wurde, wenn Widerstandskräfte von Stützpunkten vorkommen, welche senkrecht gegen die Axe AX gerichtet sind.

Die Kraft P verursacht Spannungen oder Pressungen, welche als gleichförmig im Querschnitte vertheilt vorausgesetzt werden, also $= \frac{P}{F}$ gesetzt werden dürfen, unter F den Flächeninhalt des Querschnitts verstanden.

Das Moment M erzeugt Spannungen und Pressungen, welche proportional dem Abstande von der Biegungsaxe wachsen, in welcher Hinsicht die Resultate sub Nr. 43 ohne Weiteres auf vorliegenden Fall zu übertragen sind*).

Die resultirenden Spannungen und Pressungen ergeben sich durch algebraische Addition derjenigen, welche durch P, und derjenigen, welche durch M bedingt werden; sie sind am grössten $= \sigma'$ resp. σ'' in den Punkten,

*) Der Umstand, dass ε_0 nicht = Null ist, ändert die Gleichung

$$\frac{EJ}{\varrho} = M$$

nicht, wie schon in der Anmerkung zu Nr. 43 bemerkt wurde; wenigstens nicht mit derjenigen Annäherung, mit welcher ε_0 gegen 1 vernachlässigt, also

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (1 + \varepsilon_0)\frac{\eta}{\varrho} = \varepsilon_0 + \frac{\eta}{\varrho}$$

gesetzt wird: cf. Nr. 41.

welche auf der convexen resp. concaven Seite der elastischen Fläche den grössten Abstand e' resp. e'' von der Biegungsaxe haben:

$$\sigma' = \frac{Me'}{J} \pm \frac{P}{F}; \quad \sigma'' = \frac{Me''}{J} \mp \frac{P}{F},$$

unter J das auf die Biegungsaxe bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts verstanden, und wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, jenachdem P als Zug oder als Druck wirkt.

Ist M klein, so kann es jedoch der Fall sein, dass alle Spannungen im weiteren Sinne von einerlei, nämlich von derjenigen Art (Spannungen im engeren Sinne oder Pressungen) sind, wie solche durch P hervorgerufen werden; dieser Umstand, welcher dadurch charakterisirt werden kann, dass die der Biegungsaxe parallele neutrale Axe ganz aus dem Querschnitte herausrückt, wird durch einen negativen Werth von σ' oder σ'' angezeigt.

Aufgabe ist es in jedem Falle, die grössten Werthe von σ' und σ'' zu finden, um alsdann der Forderung entsprechen zu können, dass das grössere der beiden Verhältnisse

$$\frac{max.\ \sigma'}{k'} \text{ und } \frac{max.\ \sigma''}{k''}$$

$= 1$ sei. Die Maximalwerthe von σ' und σ'' können im Allgemeinen in zwei verschiedenen Querschnitten stattfinden, für welche M ein relatives Maximum ist; am vortheilhaftesten ist es aber, wo möglich eine solche Form des Querschnitts zu wählen, dass in jedem einzelnen

$$\frac{\sigma'}{k'} = \frac{\sigma''}{k''}$$

ist, dass mithin auch diese beiden Verhältnisse gleichzeitig $= 1$ und so die Zug- und die Druckfestigkeit des Materials in gleichem Grade verwerthet werden. Die Bedingung dafür ist:

$$\frac{e''}{k''} - \frac{e'}{k'} = \pm \frac{JP}{FM}\left(\frac{1}{k'} + \frac{1}{k''}\right),$$

insbesondere für $k' = k''$:

$$e'' - e' = \pm 2\,\frac{JP}{FM},$$

wobei wieder die oberen oder unteren Zeichen gelten, jenachdem P als Zug oder als Druck wirkt.

a. Die Durchbiegung der elastischen Linie ist sehr klein im Vergleich mit der Excentricität p der belastenden Kraft P.

129. — Unter der Durchbiegung der elastischen Linie in irgend einem Punkte ist die Ausweichung dieses Punktes aus der Geraden AX verstanden, welche alle materiellen Punkte der elastischen Linie vor der Belastung enthielt. Ist diese Ausweichung überall sehr klein im Vergleich mit p, und wird dann zunächst vorausgesetzt, der Stab sei am einen Ende A

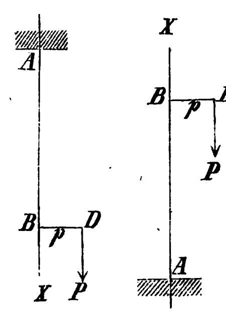


Fig. 18.

befestigt, am anderen frei und hier belastet (Fig. 18), so kann für jeden Querschnitt

$$M = Pp$$

gesetzt werden, so dass auch σ' und σ'' in allen Querschnitten gleich gross sind, nämlich:

$$\sigma' = \left(\frac{pe'}{J} \pm \frac{1}{F}\right) P$$

$$\sigma'' = \left(\frac{pe''}{J} \mp \frac{1}{F}\right) P.$$

Dergleichen excentrische Belastungen müssen möglichst vermieden werden, weil selbst im Falle, dass p nur klein im Vergleich mit e' und e'' ist, doch σ' für die Zugbelastung, σ'' für die Druckbelastung wesentlich grösser sein kann, als wenn die Richtungslinie von P mit der Axe des Stabes zusammenfällt.

130. — Hat z. B. eine excentrisch belastete Hängesäule, d. h. ein in verticaler Lage oben befestigter und unten durch ein excentrisch angehängtes Gewicht P belasteter stabförmiger Körper, einen rechteckigen Querschnitt mit den Seiten b und h (b parallel den Biegungsaxen), so ist

$$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \left(\frac{6p}{h} \pm 1\right) \frac{P}{bh},$$

z. B. mit $p = \frac{h}{2}$: $\sigma' = 4\frac{P}{bh} = 2\sigma''$.

Dadurch, dass die Richtungslinie von P in die Oberfläche der Säule fällt, wird also ihre Anstrengung 4mal so gross, als bei centrischer Belastung; sie würde verdoppelt schon bei $p = \frac{h}{6}$.

Hat der excentrisch gezogene Stab einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius r, wie z. B. der cylindrische Schaft eines Kettenhakens, so ist:

$$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \left(\frac{4p}{r} \pm 1\right) \frac{P}{\pi r^2},$$

z. B. mit $p = r : \sigma' = 5\frac{P}{\pi r^2} = \frac{5}{3}\sigma''$.

Es ist also wichtig, durch passende Krümmung des Hakens möglichst p auf Null zu reduciren.

131. — Wenn die Kraft P als Druck wirkt, indem sie z. B. eine Schwerkraft und die Säule AB in verticaler Stellung von Unten her (bei A) gestützt ist, so kann der Angriffspunkt D der Kraft P am Ende eines Seitenarms $CD = p$ sich befinden, welcher an einer mittleren Stelle C in den Abständen $AC = a$ und $BC = b$ von den Enden mit der Säule $AB = l$ verbunden ist, und es kann ausserdem die letztere an ihren Endpunkten noch von der Seite her gestützt oder auch befestigt sein. (Fig. 19.) In einem solchen Falle giebt es mehre Querschnitte, für welche M ein Maximum ist: jedenfalls die beiden Querschnitte unmittelbar ober- und unterhalb der Verbindungsstelle C zwischen Säule und Seitenarm, event. ausserdem die Quer-

schnitte an den Enden A und B, sofern daselbst nicht einfache Stützung, sondern Befestigung stattfindet.

Nimmt man AY in der Biegungsebene senkrecht zu der in Nr. 127 bezeichneten Axe AX und zwar positiv nach der Richtung CD, so seien

A und B die Widerstandskräfte bei A und B, positiv oder negativ, jenachdem sie die Richtung YA oder AY haben,

$[A]$ und $[B]$ die Spannungsmomente der Querschnitte A und B,

$[C^1]$ und $[C_1]$ die Spannungsmomente der Querschnitte unmittelbar ober- und unterhalb C, welche Momente positiv oder negativ gesetzt werden, jenachdem die elastische Linie an den betreffenden Stellen nach der Richtung YA oder AY concav gekrümmt ist.

Kennt man die Spannungsmomente $[C^1]$, $[C_1]$ und, sofern sie nicht = Null sind, $[A]$ und $[B]$, so findet man die entsprechenden 2 resp. 3 oder 4 relativen Maxima von σ' und σ'' nach den Formeln sub Nr. 128. Welche von diesen Werthen die absolut grössten, mithin massgebenden sind, hängt ab von dem Verhältnisse $a:b$ und von der verhältnissmässigen Grösse der Excentricität p, verglichen mit den Querdimensionen des Stabes. In den folgenden Paragraphen sind nur jene relativ grössten Spannungsmomente angegeben, woraus die weiteren Folgerungen in jedem gegebenen besonderen Falle leicht gezogen werden.

Jedenfalls ist A negativ, B positiv und

$$A + B = 0$$
$$[C_1] = [C^1] - Pp.$$

Bei C findet eine plötzliche Aenderung der Krümmung der elastischen Linie statt, entsprechend einer Stetigkeitsunterbrechung 3ter Ordnung ihrer Ordinate y.

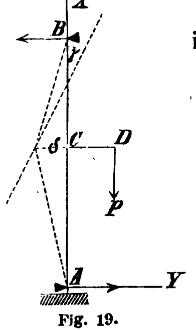


Fig. 19.

132. — Die excentrisch belastete Säule AB ist oben und unten gestützt: Fig. 19. Hier ist:

$$[A] = [B] = 0$$
$$-A = B = \frac{Pp}{l}$$
$$[C^1] = Bb = \frac{b}{l}\,Pp$$
$$[C_1] = [C^1] - Pp = -\frac{a}{l}\,Pp.$$

133. — Die excentrisch belastete Säule AB ist unten (bei A nach der Richtung AB befestigt, oben gestützt. Hier ist nur

$$[B] = 0.$$

Ist γ der Winkel, unter welchem die elastische Linie bei C gegen die x-Axe geneigt ist, δ die Ausweichung des Punktes C aus der x-Axe nach

der Richtung YA (cf. Fig. 19 die punktirten Linien), so kann man nach den Formeln für A und $[B]$ sub Nr. 61, indem man darin

$$P = Q = 0;\ \alpha = \frac{\delta}{a};\ \beta = -\gamma - \frac{\delta}{a};\ l = a$$

setzt, A und $[C_1]$ durch γ und δ ausdrücken; desgl. auch B und $[C^1]$ nach den Formeln für B und $[A]$ sub Nr. 71, wenn man darin

$$P = Q = 0;\ \alpha = \gamma - \frac{\delta}{b};\ l = b$$

setzt. Die Relationen

$$A + B = 0 \text{ und } [C_1] = [C^1] - Pp$$

liefern dann 2 Gleichungen zur Berechnung von γ und δ, und die Substitution ihrer Werthe giebt:

$$-A = B = \frac{3a(a+2b)}{2l^3} Pp$$

$$[C^1] = \frac{3ab(a+2b)}{2l^3} Pp$$

$$[C_1] = -\frac{2a^3 + 3a^2b + 2b^3}{2l^3} Pp.$$

Endlich ist:

$$[A] = Bl - Pp = \frac{a^2 + 2b(a-b)}{2l^2} Pp.$$

Ebenso wie im vorigen Falle sub Nr. 132 ist auch hier immer $[C^1]$ positiv, $[C_1]$ negativ, d. h. es findet bei C ein Wechsel im Sinne der Krümmung statt. Das Spannungsmoment $[A]$ ist positiv oder negativ, jenachdem

$$\frac{a}{b} \gtrless -1 + \sqrt{3} = 0{,}732$$

ist; letzteren Falls ist der Absolutwerth von $[A]$ stets kleiner, als derjenige von $[C_1]$, und es sind deshalb dann die Maximalwerthe von σ' und σ'' nur in den Querschnitten unmittelbar ober- und unterhalb C zu suchen.

134. — Die excentrisch belastete Säule ist an beiden Enden A und B nach den Richtungen AB resp. BA befestigt. Haben γ und δ die in der vorigen Nr. erklärten Bedeutungen, so lassen sich A und $[C_1]$ wie dort durch γ und δ ausdrücken vermittels der Formeln für A und $[B]$ sub Nr. 61; dieselben Formeln liefern aber hier auch die Ausdrücke von B und $[C^1]$ durch γ und δ, und zwar mit den Substitutionen:

$$P = Q = 0;\ \alpha = \frac{\delta}{b};\ \beta = \gamma - \frac{\delta}{b};\ l = b.$$

Die Einführung der aus den Gleichungen

$$A + B = 0;\ [C_1] = [C^1] - Pp$$

entwickelten Werthe von γ und δ giebt dann:

$$-A = B = \frac{6ab}{l^3} Pp$$

$$[C^1] = \frac{a(a^2 - ab + 4b^2)}{l^3} Pp$$

$$[C_1] = -\frac{b(4a^2 - ab + b^2)}{l^3} Pp.$$

Endlich ist:

$$[B] = [C^1] - Bb = \frac{a(a-2b)}{l^2} Pp$$

$$[A] = [C_1] - Aa = \frac{b(2a-b)}{l^2} Pp.$$

$[C^1]$ ist immer positiv, $[C_1]$ immer negativ; ein positiver Werth von $[B]$ ist stets $< [C^1]$, ein negativer Werth von $[A]$ absolut genommen $< [C_1]$. Die Maximalwerthe von σ' und σ'' sind also, wenn $a > 2b$ ist, auf keinen Fall im Querschnitte bei B, und wenn $b > 2a$ ist, auf keinen Fall im Querschnitte bei A zu suchen.

b. Die Durchbiegung der elastischen Linie ist nicht sehr klein im Vergleich mit der Excentricität p der belastenden Kraft P.

135. — Der Stab AB sei bei A befestigt, übrigens frei und am freien Ende B belastet. Ist dann die Ausweichung f dieses Endpunktes B der elastischen Linie aus der Geraden AX nicht gegen die Excentricität $BD = p$ des Angriffspunktes D zu vernachlässigen, so verhalten sich die beiden durch Fig. 18 dargestellten Fälle wesentlich verschieden: siehe Fig. 20.

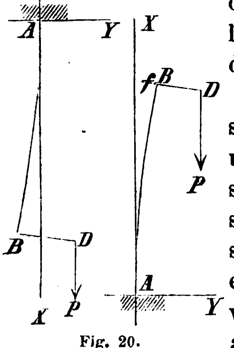


Fig. 20.

Wirkt P als Zug, so findet eine solche Biegung statt, dass M von B nach A abnimmt; der grösste und deshalb massgebende Werth von M im Querschnitte bei B ist aber ebenso gross, als ob f verschwindend klein wäre, nämlich $= Pp$, sofern der Unschied zwischen p und seiner Projection auf AY als eine im Vergleich mit p kleine Grösse 2ter Ordnung vernachlässigt wird. Mit solcher Annäherung sind also auch die Maximalwerthe von σ' und σ'' den in Nr. 129 angeführten gleich.

136. — Wirkt aber P als Druck, so nimmt M von B nach A zu, und es ist hier

$$max.\ M = P(p + f),$$

ein Ausdruck, dessen Werthbestimmung die Kenntniss der Gleichung der elastischen Linie erfordert. Aus der Momentengleichung:

$$\frac{EJ}{\varrho} = P(p + f - y)$$

oder mit der üblichen und in den Fällen der Praxis meistens zulässigen Näherung:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P}{EJ}(p + f - y)$$

findet man aber durch Integration mit Rücksicht darauf, dass

$$x = 0;\ y = 0;\ \frac{dy}{dx} = 0$$

den Bedingungen der Aufgabe gemäss zusammengehörige Werthe sind:

$$\frac{y}{p+f} = 1 - \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right),$$

daraus mit $x = l$, $y = f$:

$$\frac{f}{p+f} = 1 - \cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) \text{ oder } \frac{p+f}{p} = \frac{1}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)},$$

folglich auch

$$\frac{y}{p} = \frac{1 - \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}$$

als Gleichung der elastischen Linie. Die Substitution von

$$P(p+f) = \frac{Pp}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}$$

für M in den Ausdrücken von σ' und σ'' sub Nr. 128 liefert endlich:

$$max.\ \sigma' = \left(\frac{pe'}{J.\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)} - \frac{1}{F}\right)P$$

$$max.\ \sigma'' = \left(\frac{pe''}{J.\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)} + \frac{1}{F}\right)P.$$

II. Zerknickungsfestigkeit.

a. Gerader Stab von constantem Querschnitte.

137. — Wenn ein gerader Stab AB am Ende A befestigt ist und am anderen, freien Ende durch eine genau im Endpunkte B der geraden Mittellinie AB angreifende und nach BA gerichtete Kraft P gedrückt wird (z. B. vertical stehend und oben durch ein Gewicht belastet), so ist zwar an und für sich kein Grund vorhanden, weshalb der Stab eine andere Deformation, als eine blosse Zusammendrückung bei gerade bleibender Mittellinie erfahren sollte; allein es kann bei verhältnissmässig grosser Länge des Stabes und starker Belastung jener Gleichge-

wichtszustand ein der Art labiler sein, dass durch den geringsten zufälligen Umstand, z. B. durch einen zufälligen Seitendruck oder wegen mangelhafter Homogenität des Materials eine bleibende Biegung eintritt, wodurch neue Spannungen und Pressungen verursacht werden, die mit den im Querschnitte gleichförmig vertheilten Pressungen $= \frac{P}{F}$ sich combiniren.

Ein solcher Gleichgewichtszustand bei gekrümmter Mittellinie und unter der Voraussetzung einer auch bei der Biegung constant bleibenden Richtung der Kraft kann als Grenzfall des in Nr. 136 besprochenen Falles betrachtet werden, entsprechend dem Uebergange von p in die Grenze Null, während f eine endliche Grösse behält. Indem aber damit

$$\frac{1}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)} = lim.\ \frac{p+f}{p} = \frac{f}{0}, \text{ also } \cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) = 0$$

wird, erhielte man

$$max.\ \sigma' = \left(\frac{e'}{J}\frac{0}{0} - \frac{1}{F}\right)P;\quad max.\ \sigma'' = \left(\frac{e''}{J}\frac{0}{0} + \frac{1}{F}\right)P,$$

also unbestimmte Werthe, woraus man schliesst, dass, wenn die Verhältnisse der Art sind, um das Gleichgewicht bei gekrümmter Mittellinie überhaupt möglich zu machen, dasselbe bei jedem Werthe von f stattfinden könne, so dass man keinerlei Sicherheit dafür haben würde, dass die Biegung und die entsprechenden Spannungen nicht so gross werden, um den Bruch des Stabes durch Zerknickung herbeizuführen. Man folgert also weiter, dass, um jene Gefahr zu vermeiden, P jedenfalls kleiner genommen werden müsse, als der kleinste Werth, bei welchem eine noch so kleine Biegung überhaupt bestehen, d. h. wodurch

$$\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) = 0$$

werden kann; dieser Werth ist

$$P = \frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{l^2}$$

und wird sonach als diejenige Kraft betrachtet, durch welche der Stab zwar nicht nothwendig zerknickt werden muss, aber doch bei der geringsten Zufälligkeit zerknickt werden kann*).

Natürlich ist im Allgemeinen anzunehmen, dass die Biegung in dem Sinne eintritt, für welchen der Widerstand dagegen am kleinsten ist; J bedeutet also hier das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts für irgend eine Biegungsaxe.

138. — Der Bedingung: $\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) = 0$ kann auch genügt werden durch:

$$P = 9\frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{l^2};\ 25\frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{l^2}\ldots(2n+1)^2\frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{l^2}$$

---

*) Eine strengere Prüfung dieser Schlussfolgerungen enthält Nr. 142—144.

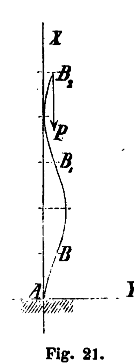


Fig. 21.

entsprechend dem Umstande, dass die elastische Linie (Fig. 21), deren Gleichung nach Nr. 136

$$y = f\left[1 - cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)\right]$$

ist, bis zu irgend einem der unendlich vielen Punkte $B_1, B_2 \ldots B_n$ reicht, für welche $y = f$ ist ebenso wie für den Punkt B. Ist freilich der Stab am belasteten Ende frei, so ist der Eintritt einer solchen weniger einfachen und eine grössere Kraft erfordernden Biegung nicht anzunehmen; dagegen führt diese Betrachtung zu dem Ausdrucke für die Bruchbelastung P bei einer anderen Art der Stützung oder Befestigung der Stabenden: Nr. 140.

139. — Befinden sich die Stabenden unter solchen Verhältnissen, dass die elastische Linie mit beiden Endpunkten in der Richtungslinie von P bleiben muss, jedoch ungehindert ihre Neigung gegen dieselbe ändern kann (z. B. eine Schubstange, an beiden Enden um Zapfen drehbar), so verhält sich jede Hälfte des Stabes gerade so wie der ganze Stab im Falle sub Nr. 137, und es kann also, wenn mit l immer die ganze Länge des Stabes bezeichnet wird, die Zerknickung erfolgen durch die Kraft:

$$P = \frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2} = \pi^2\frac{EJ}{l^2}.$$

140. — Ist die elastische Linie genöthigt, nicht nur mit ihren Endpunkten in der Richtungslinie von P zu bleiben, sondern auch von dieser daselbst berührt zu werden (z. B. eine Säule, welche beiderseits befestigt oder auch nur flach abgeschnitten und gegen entsprechende ebene Flächen gestützt ist), so stimmt bei der einfachst möglichen Biegungsweise die elastische Linie überein mit den unteren $^4/_5$ der Curve AB_2 (Fig. 21), und es ist also die Kraft, wodurch der Stab zerknickt werden kann:

$$P = 25\frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{\left(\frac{5}{4}l\right)^2} = 4\pi^2\frac{EJ}{l^2}.$$

141. — Endlich kann es noch der Fall sein, dass der Stab am einen Ende sich wie sub Nr. 139, am anderen wie sub Nr. 140 verhält, dass also die elastische Linie genöthigt ist, mit beiden Endpunkten in der Richtungslinie von P zu bleiben und zugleich im einen Endpunkte A von ihr berührt zu werden, während am anderen Ende B eine ungehinderte Neigungsänderung stattfinden kann. Die einfachste, also wahrscheinlichste und gefährlichste Biegung für diesen

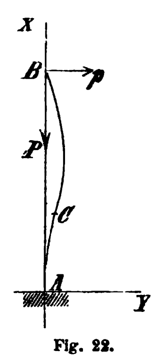


Fig. 22.

Fall zeigt Fig. 22; sie ist, weil ausserhalb AX ein durch $M = 0$ charakterisirter Inflexionspunkt C liegen muss, nur dadurch möglich, dass das Stabende B durch eine Führung in AX zu bleiben gezwungen wird. Dadurch wird ein gewisser Seitendruck p der Führung als mitbestimmend auf die Werthe von M für die verschiedenen Querschnitte des Stabes eingeführt, welcher sonach an die Stelle der Unbekannten f in dem Fundamentalfalle sub Nr. 137 und den daraus abgeleiteten Fällen tritt und, ebenso wie dort f, nur mit Hülfe der elastischen Linie, wenn überhaupt, bestimmt werden kann.

Der Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -Py + p(l-x)$$

entspricht das Integral:

$$\frac{P}{EJ}y = A.\sin\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) + B.\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) + \frac{p}{EJ}(l-x)$$

und zur Bestimmung der Constanten A, B sowie der Unbekannten p sind den Bedingungen der Aufgabe gemäss die zusammengehörigen Werthe:

$$x = 0,\ y = 0;\ x = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0;\ x = l,\ y = 0$$

gegeben; es zeigt sich aber, dass die 3 dadurch gelieferten Gleichungen nur die Verhältnisse, nicht die Absolutwerthe von A, B und p bestimmen, während die Möglichkeit des Zusammenbestehens dieser Gleichungen, somit die Möglichkeit der Biegung überhaupt an die Bedingung:

$$l\sqrt{\frac{P}{EJ}} = tg\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)$$

geknüpft ist. Analog der Schlussfolgerung in Nr. 137 ist daraus zu schliessen, dass der kleinste Werth von P, welcher dieser Bedingungsgleichung entspricht, nämlich

$$P = 20{,}19\frac{EJ}{l^2} = 2{,}046\,\pi^2\frac{EJ}{l^2}$$

die Zerknickung des Stabes herbeiführen kann.

142. — Die auffallenden Resultate der letzten Nummern, welche darauf beruhen, dass der Krümmungsradius der elastischen Linie $= 1 : \frac{d^2y}{dx^2}$ anstatt

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

gesetzt wurde, erfordern eine nähere Prüfung. Es werde dabei der Fundamentalfall des einerseits befestigten, anderseits freien und am

freien Ende B belasteten Stabes vorausgesetzt: Fig. 23. Entsprechend dem vollständigen Ausdrucke:

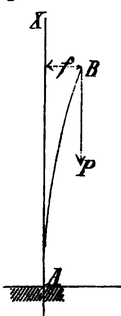


Fig. 23.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (1 + \varepsilon_0)\frac{\eta}{\varrho}$$

der Ausdehnung ε im Abstande η von der Biegungsaxe eines Querschnitts (cf. Nr. 128, Anmerkung) werde dabei die Momentengleichung in der vervollständigten Form:

$$\frac{EJ(1+\varepsilon_0)}{\varrho} = M = P(f-y)$$

zu Grunde gelegt, dabei aber ε_0, was streng genommen von B nach A etwas wächst, als eine Constante behandelt:

$$\varepsilon_0 = -\frac{P}{EF}.$$

Mit der kürzeren Bezeichnung:

$$a^2 = \frac{P}{EJ(1+\varepsilon_0)},$$

ferner bei Einführung der Veränderlichen z, welche zu y in der Beziehung steht:

$$f-y = -z; \text{ also } \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}; \ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2},$$

lässt obige Momentengleichung sich schreiben:

$$\frac{\dfrac{d^2z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -a^2 z$$

und sie liefert durch eine erste Integration, deren Constante durch

$$z = -f; \ \frac{dz}{dx} = 0$$

bestimmt ist:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{1}{1 - \dfrac{a^2}{2}(f^2 - z^2)}$$

oder

$$dx = \frac{1 - \dfrac{a^2}{2}(f^2 - z^2)}{\sqrt{\left[2 - \dfrac{a^2}{2}(f^2 - z^2)\right]\dfrac{a^2}{2}(f^2 - z^2)}} \cdot dz.$$

Die zweite Integration kann mit Hülfe einer Reihenentwickelung ausgeführt werden, indem $a^2(f^2 - z^2)$ eine mit $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ vergleichbare, jedenfalls kleine Grösse ist; setzt man

$$u = a^2(f^2 - z^2),$$

so wird:

$$dx = \frac{-du}{2a\sqrt{a^2f^2u-u^2}}\;\frac{1-\frac{u}{2}}{\sqrt{1-\frac{u}{4}}}$$

$$= \frac{-du}{2a\sqrt{a^2f^2u-u^2}}\left(1-\frac{u}{2}\right).\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{u}{4}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{u^2}{16}+\ldots\right)$$

$$= \frac{-du}{2a\sqrt{a^2f^2u-u^2}}\,(1+\alpha u+\beta u^2+\ldots);$$

$$\alpha = -\frac{3}{8};\quad \beta = -\frac{5}{128}.$$

Durch Ausführung der Integration, wobei alle einzelnen Integrale auf das bekannte

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2f^2u-u^2}}$$

zurückgeführt werden können, und wobei die Constante durch

$$x=0;\; z=-f;\; u=0$$

bestimmt ist, ergiebt sich als Gleichung der elastischen Linie, wenn schliesslich für u sein Werth wieder eingeführt wird:

$$2ax = \left[\alpha+\frac{1}{4}\,\beta a^2\,(5f^2-2z^2)+\ldots\right]a^2z\sqrt{f^2-z^2}+$$

$$+\left(1+\frac{1}{2}\,\alpha a^2f^2+\frac{3}{8}\,\beta a^4f^4+\ldots\right) arc\cos\frac{2z^2-f^2}{f^2}.$$

Ist insbesondere x_1 die Abscisse des Punktes B, d. h. die Projection der elastischen Linie auf die x-Axe, so ist (mit $z=0$):

$$2ax_1 = \left(1+\frac{1}{2}\,\alpha a^2f^2+\frac{3}{8}\,\beta a^4f^4+\ldots\right)\pi.$$

143. — Die Gleichung der elastischen Linie ist an und für sich ohne Interesse für den vorliegenden Zweck; worauf es ankommt, ist die Beziehung zwischen a, f und der Länge des Stabes, zunächst also die Beziehung zwischen a, f und der Bogenlänge $AB=s_1$ der elastischen Linie. Wegen

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{dx}{1-\frac{u}{2}}$$

ist aber nach Nr. 142:

$$ds = \frac{-du}{2a\sqrt{a^2f^2u-u^2}}\,(1+\alpha u+\beta u^2+\ldots)$$

= dem früheren Ausdrucke von dx, nur mit dem Unterschiede, dass hier

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4};\quad \beta = \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{16}\ldots$$

ist. Mit dieser Modification hat also auch s_1 denselben Ausdruck wie oben x_1, d. h. es ist:

$$2as_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{a^2f^2}{4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{a^4f^4}{16} + \dots\right] \pi,$$

und indem endlich s_1 zu der ursprünglichen Länge l des Stabes in der Beziehung steht:

$$s_1 = l\,(1 + \varepsilon_0),$$

so erhält man bei Einsetzung des Werthes von a:

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}(1+\varepsilon_0)} = \frac{\pi}{2l}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{P}{EJ\,(1+\varepsilon_0)}\frac{f^2}{4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{P}{EJ\,(1+\varepsilon_0)}\frac{f^2}{4}\right)^2 + \dots\right].$$

Die schnelle Converganz der Reihe ist daraus zu beurtheilen, dass

$$\frac{Pf^2}{EJ\,(1+\varepsilon_0)} = \frac{f}{\varrho_0}$$

ist, unter ϱ_0 den Krümmungsradius der elastischen Linie im Punkte A verstanden.

144. — Bei Vernachlässigung des sehr kleinen Bruchs ε gegen 1 (er ist im Allgemeinen $< 0{,}001$) erhält man:

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2l}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{P}{EJ}\frac{f^2}{4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{P}{EJ}\frac{f^2}{4}\right)^2 + \dots\right].$$

Lässt man f bis Null abnehmen, so ist in der Grenze:

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{l^2},$$

und es war also richtig, diese Kraftgrösse in Nr. 137 als die kleinste zu bezeichnen, bei welcher eine Biegung des Stabes überhaupt möglich zu werden anfängt; dagegen ist die Unbestimmtheit der Durchbiegung f durch die genauere Analyse beseitigt worden, indem vielmehr f stetig zunimmt, wenn P über jene Grenze P_0 hinaus wächst.

In den praktischen Anwendungen sind freilich die Verhältnisse meistens von solcher Art, dass P nur wenig $> P_0$ zu sein braucht, um eine unzulässige, nämlich solche Grösse der Durchbiegung f zu bewirken, welche eine übermässige Anstrengung oder gar die Zerknickung des Stabes zur Folge haben würde. In der That ist mit

$$J = Fi^2 : \varepsilon_0 = -\frac{P}{EF} = -\frac{P}{EJ}i^2;$$

ist also $f^2 \lesseqgtr 16i^2$, z. B. bei rechteckigem Querschnitte mit der Seite h in der Biegungsebene: $f^2 \lesseqgtr \frac{4}{3}h^2$, oder bei kreisförmigem Querschnitte mit dem Durchmesser d: $f^2 \lesseqgtr d^2$, ist also überhaupt f nicht wesentlich grösser, als die Dicke des Stabes, was in den praktischen Anwendungen der gewöhnliche Fall ist, so darf schon das zweite Glied der Reihe mit demselben Rechte vernachlässigt werden, mit welchem ε_0, d. h. höchstens etwa 0,001 gegen 1 vernachlässigt wird, so dass man mit dieser Annäherung dann doch wieder auf die Kraftgrösse

$$P = \frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{l^2}$$

für jeden zulässigen Werth von f zurückkommen, mithin ein praktisches Bedürfniss zur Correction der Resultate sub Nr. 137—141 nicht vorliegen würde.

Nur wenn f wesentlich grösser werden kann, als die Dicke des Stabes, ist eine Correction nöthig; wenn man dabei nur das zweite Glied der Reihe berücksichtigt und in diesem zudem für P den ersten Näherungswerth P_0 setzt, so erhält man als zweite Näherung:

$$P = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{EJ}{l^2}\left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{32\, l^2}\right)$$

für den Fall sub Nr. 137, also

$$P = \pi^2\,\frac{EJ}{l^2}\left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{8\, l^2}\right)$$

für den Fall sub Nr. 139, unter f im letzteren Falle die Pfeilhöhe des ganzen von der elastischen Linie gebildeten Bogens verstanden.

145. — Dem Vorhergehenden zufolge vermag auch die genaueste Analyse nicht zu hindern, dass die sogen. Zerknickungsfestigkeit eine schwache Seite der praktischen Festigkeitslehre ist; man muss darauf verzichten, der in Nr. 5 bezeichneten allgemeinen Hauptaufgabe entsprechend hier die Verhältnisse so zu wählen, dass die Maximalwerthe von σ' und σ'' durch die Biegung des Stabes gegebenen Werthen k' und k'' gleich werden, weil dann eine äusserst geringe Vergrösserung von P oder l oder eine sehr geringe Verkleinerung der Stabdicke schon hinreichen würde, um mit f zugleich σ' und σ'' bis zur Gefahr der Zerknickung zu steigern. Es bleibt nur übrig, die Verhältnisse so zu wählen, dass erst durch das $n$fache der gegebenen Kraft P die theoretische Möglichkeit irgend einer Biegung eintreten und damit die Gefahr der Zerknickung nahe rücken würde; die Wahl des Sicherheitscoefficienten n ist dabei ganz der Willkür anheimgegeben, indem er lediglich zufälligen oder einer rationellen Berücksichtigung sich entziehenden Umständen Rechnung zu tragen hat, insbesondere einer etwaigen Abweichung des Angriffspunktes und der Richtung der Kraft P von der vorausgesetzten Lage und Richtung, einer etwa mangelhaften Homogenität des Materials, zufälligen Seitenkräften oder Erschütterungen etc.

146. — Wenn die Kraft P, welche nach der Theorie die Biegung des Stabes ermöglichen würde, grösser ist, als die einfache Druckfestigkeit $= K''F$, so schliesst man, dass thatsächlich die Biegung und die Zerknickung in Folge derselben nicht eintreten könne, weil zuvor schon der Stab durch gleichförmige Compression zerdrückt wäre. Der Grenze zwischen beiden Fällen, d. h. dem Uebergange von der einfachen Druck- zur Zerknickungsfestigkeit entspricht ein gewisses Verhältniss der Länge zur Dicke des Stabes, welches vom Material, von der Form des Querschnitts und von der Art der Stützung resp. Befestigung des Stabes abhängt, indem es bestimmt ist durch die Gleichung:

$$K''F = m\,\frac{EJ}{l^2},$$

worin für die in Nr. 137—141 besprochenen Fälle

$$m = \frac{\pi^2}{4}\ ;\quad \pi^2\ ;\quad 2{,}046\,\pi^2\ ;\quad 4\pi^2$$

zu setzen ist. Mit $J = Fi^2$ folgt daraus:

$$\frac{l}{i} = \sqrt{m\frac{E}{K''}},$$

insbesondere für den Fundamentalfall sub Nr. 137:

$$\frac{l}{i} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E}{K''}},$$

in den übrigen Fällen aber im Verhältnisse

$$1 : 2 : 2{,}86 : 4$$

grösser. Mit den in der Tabelle sub Nr. 14 angegebenen Mittelwerthen von E und K'' ergiebt sich danach im Fundamentalfalle jenes Grenzverhältniss

für Holz, Gusseisen, Schmiedeeisen

$$\frac{l}{i} = 23{,}51\ ;\quad 18{,}14\ ;\quad 37{,}55.$$

Ist z. B. der Querschnitt ein Rechteck, h dessen zur Biegungsaxe senkrechte Seite (Dicke des Stabes), so ist $i^2 = \frac{h^2}{12}$, also:

$$\frac{l}{h} = 6{,}79\ ;\quad 5{,}24\ ;\quad 10{,}84\ ;$$

ist er ein Kreis mit dem Durchmesser d, so ist $i^2 = \frac{d^2}{16}$, also:

$$\frac{l}{d} = 5{,}88\ ;\quad 4{,}53\ ;\quad 9{,}39.$$

147. — Wenn man nun einen Stab auf einfache Druckfestigkeit oder auf Zerknickungsfestigkeit berechnet, jenachdem $\frac{l}{i}$ kleiner oder grösser, als jenes in voriger Nr. ermittelte Grenzverhältniss ist, so ist dies immerhin doch nur als ein Nothbehelf zu betrachten, weil es erfahrungsmässig nicht eine bestimmte Länge l giebt, von welcher an die Bruchbelastung eines Stabes plötzlich abhängig von l zu werden anfinge, während sie bis dahin unabhängig von l gewesen wäre. In der That findet man die Bruchbelastung P stetig abnehmend, wenn das Verhältniss $\frac{l}{i} = x$ von Null an wächst, freilich so, dass für $x = 0$ auch $\frac{dP}{dx} = 0$ ist. Diesem Verhalten würde es besser entsprechen, wenn die Bruchbelastung P für alle Werthe von x durch dieselbe (empirische) Function ausgedrückt würde, welche so beschaffen sein müsste, dass sie immer kleiner, als $K''F$ und als $m\frac{EJ}{l^2}$ ist, dass sie sich ferner diesen Werthen als Grenzen nähert, wenn $\frac{l}{i}$ ohne Ende ab- resp.

zunimmt, und dass zugleich $\frac{dP}{dx} = 0$ ist für $x = \frac{l}{i} = 0$. Eine solche Function ist:

$$P = \frac{K''F \cdot m\frac{EJ}{l^2}}{K''F + m\frac{EJ}{l^2}} = \frac{K''F \cdot mEi^2}{K''l^2 + mEi^2} = \frac{mEF}{\frac{l^2}{i^2} + m\frac{E}{K''}}$$

oder

$$P = \frac{mEF}{x^2 + x_1^2},$$

wenn $\frac{l}{i} = x$ und das in Nr. 146 bestimmte Grenzverhältniss $= x_1$ gesetzt wird.

Nach dieser empirischen Formel wäre für $x = x_1$ die Bruchbelastung P schon auf $\frac{1}{2}K''F$ herabgesunken; auch würde

$$1 : 4 : 4 \,.\, 2{,}046 : 16$$

nicht das Verhältniss der Bruchbelastungen desselben Stabes für die mehrgenannten 4 Fälle, sondern vielmehr das Verhältniss derjenigen Werthe von $\frac{l^2}{i^2}$ sein, welchen bei einerlei Material und Querschnitt $= F$ derselbe Werth von P in jenen 4 Fällen entspricht.

148. — Versuche über die Zerknickungsfestigkeit, welche bei den Mängeln der Theorie hier von besonderer Wichtigkeit sind, hat vorzugsweise Hodgkinson in ausgedehntem Masse ausgeführt mit Stäben von Gusseisen, Schmiedeeisen und Holz. Die Hauptresultate dieser Versuche, auf das Centimeter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit reducirt, hat Hodgkinson für die beiden Fälle, dass die Stabenden entweder zugeschärft und beweglich (2ter Fall) oder dass sie eben abgeschnitten und unbeweglich sind (4ter Fall), in den folgenden empirischen Formeln zusammengefasst, wobei sich

Nr. 1 auf eine massive cylindrische Säule aus Gusseisen,
Nr. 2 „ „ hohle „ „ „ „
Nr. 3 „ „ massive „ „ „ Schmiedeeisen,
Nr. 4 „ „ quadratische Säule aus Eichenholz,
Nr. 5 „ „ „ „ „ Fichtenholz

bezieht, und wobei ferner

P das zerknickende Gewicht,
l die Länge der Säule,
d den Durchmesser, beziehungsweise den äusseren Durchmesser der massiven resp. hohlen cylindrischen Säule,
d_1 den inneren Durchmesser der hohlen Säule,
a die Seite des quadratischen Querschnitts

bedeutet. Endlich gelten die Formeln für den 2ten Fall nur unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{l}{d} > 15,$$

für den 4ten Fall nur unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{l}{d} \text{ resp. } \frac{l}{a} > 30$$

ist.

Nr.	2ter Fall.	4ter Fall.
1.	$P = 151625 \frac{d^{3,76}}{l^{1,7}}$	$P = 546548 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$
2.	$P = 132291 \frac{d^{3,76} - d_1^{3,76}}{l^{1,7}}$	$P = 548775 \frac{d^{3,55} - d_1^{3,55}}{l^{1,7}}$
3.	$P = 1214035 \frac{d^{3,76}}{l^2}$	$P = 4614184 \frac{d^{3,55}}{l^2}$
4.		$P = 248338 \frac{a^4}{l^2}$
5.		$P = 177125 \frac{a^4}{l^2}.$

Für den Fall des einerseits zugeschärften, anderseits eben abgeschnittenen Stabendes (3ter Fall, vorausgesetzt, dass durch geeignete Mittel beide Endpunkte der elastischen Linie in der Richtungslinie des belastenden Drucks erhalten werden) wurde die Bruchbelastung ungefähr = dem arithmetischen Mittel derer für den 2ten und 4ten Fall unter sonst gleichen Umständen gefunden. Für solche Fälle endlich, in denen $\frac{l}{d}$ resp. $\frac{l}{a}$ kleiner, als 15 im 2ten resp. 30 im 4ten Falle, immerhin aber noch ziemlich gross ist, giebt Hodgkinson die empirische Formel:

$$P = \frac{K''F \,.\, P_1}{\frac{3}{4} K''F + P_1},$$

in welcher P_1 den betreffenden Werth nach obiger Tabelle bedeutet*).

*) Folgende Beispiele mögen zur Vergleichung der Hodgkinson'schen mit den in den vorhergehenden Nummern angeführten Formeln dienen. Es ist dabei mit

1) das Resultat nach Hodgkinson,

2) „ „ „ der Formel $P = \frac{mEF}{x^2 + x_1^2}$ (Nr. 147),

3) „ „ „ „ „ $P = m\frac{EJ}{l^2}$

bezeichnet, und zwar sind die Werthe sub 2) und 3) auf Grund der in No. 14 angegebenen mittleren Constanten E und K'' für Holz, Gusseisen und Schmiedeeisen berechnet.

A. Quadratischer Stab von Holz; die Werthe sub 1) mit dem mittleren Coefficienten

$$\frac{248338 + 177125}{2} = 212731$$

berechnet. Werthe von $\frac{P}{a^2}$

149. — **Eine schmiedeeiserne Schubstange von der Länge l mit kreisförmigem Querschnitte habe den Druck P von dem einen zum anderen der an den Enden von ihr umfassten Zapfen zu übertragen. Soll ihre Dicke d so bestimmt werden, dass sie voraussichtlich erst durch den $n$fachen Druck P zerknickt werden würde, so kann nach Nr. 147 gesetzt werden:**

$$nP = \frac{K''F \cdot \pi^2 \frac{EJ}{l^2}}{K''F + \pi^2 \frac{EJ}{l^2}},$$

---

für $\frac{l}{a}$ =	4ter Fall.		
	30	40	50
1)	236	133	85
2)	225	158	114
3)	409	230	147.

B. Cylindrischer Stab von Gusseisen bei $d = 6^{cm}$ Durchm. Werthe von $\frac{P}{d^2}$

für $\frac{l}{d}$ =	2ter Fall.			4ter Fall.		
	15	20	25	30	40	50
1)	1691	1037	710	1288	790	540
2)	1578	1005	685	1578	1005	685
3)	2153	1211	775	2153	1211	775.

C. Cylindrischer Stab von Schmiedeeisen bei $d = 6^{cm}$ Durchm. Werthe von $\frac{P}{d^2}$.

für $\frac{l}{d}$ =	2ter Fall.			4ter Fall.		
	15	20	25	30	40	50
1)	3510	1974	1264	2289	1288	824
2)	1677	1287	991	1677	1287	991
3)		2422	1550		2422	1550.

(Bei dem schmiedeeisernen Stabe ist für $\frac{l}{d} = 15$ im 2ten resp. $= 30$ im 4ten Falle noch $x < x_1$ und deshalb die Formel $P = m\frac{EJ}{l^2}$ ohne Bedeutung.)

Die Werthe sub 3) sind hiernach immer zu gross. Die Werthe sub 2) stimmen ziemlich gut mit denen sub 1) bei den Stäben von Holz und Gusseisen; sind auch sie für den 4ten Fall im Allgemeinen noch etwas zu gross, so hat dies zum Theil vielleicht darin seinen Grund, dass die charakteristischen Bedingungen des 4ten Falles bei den Versuchen von Hodgkinson nicht vollkommen erfüllt wurden.

Bei dem schmiedeeisernen Stabe freilich sind im 2ten Falle die Werthe sub 2) wesentlich kleiner, als die nach der Hodgkinson'schen Formel berechneten; indessen dürften die letzteren kaum grosses Vertrauen verdienen, weil sie ein Schmiedeeisen von ganz abnorm grosser Druckfestigkeit voraussetzen würden. Mit dem Mittelwerthe $K'' = 3500$ wäre selbst für ein verschwindend kleines $\frac{l}{d}$, also für reine Druckfestigkeit nur $\frac{P}{d^2} = 2749$ und für $\frac{l}{d} = 12$ nach Angaben von Navier nur $^5/_8$ so gross, also hier $= 1718$. Ohne specielle Kenntniss der Constanten E und K'' für diejenigen Materialien, mit denen Hodgkinson experimentirt hat, ist eine sichere Vergleichung überhaupt nicht möglich.

woraus, wenn in runder Zahl 10 für π^2 gesetzt wird,

$$d^4 = \frac{32nP}{5E\pi}\left(1 + \frac{5E}{8K''}\frac{d^2}{l^2}\right)l^2$$

sich ergiebt. Zum Zweck einer einfachen Constructionsregel ist es aber vorzuziehen, dieses d in Verhältniss zu setzen zum Durchmesser δ der von den Schubstangenköpfen umfassten, gleichfalls schmiedeeisernen Zapfen, welche als einfach und einerseits angeheftet, anderseits frei hervorstehend hierbei vorausgesetzt werden; ist dann λ die Zapfenlänge und K der sogenannte Coefficient der Bruchfestigkeit, d. h. diejenige Maximalspannung, bei welcher der Zapfen abbrechen würde, falls die Elasticitätsgesetze bis zum Bruche gültig blieben, so ist für n_1 fache Sicherheit (cf. Nr. 52):

$$n_1 P.\frac{\lambda}{2} = K\frac{\pi\delta^3}{32}; \text{ daraus } \delta^4 = \frac{16 n_1 P}{K\pi}\frac{\lambda}{\delta}\delta^2.$$

Durch Division der Gleichungen für d^4 und δ^4 folgt mit $\frac{n}{n_1} = m$ und wenn

$$E = 2000000;\ K = 4000;\ K'' = 3125;\ \frac{\delta}{\lambda} = \frac{3}{4}$$

gesetzt wird:

$$\frac{d}{\delta} = 0{,}1\sqrt[4]{6m\left(1 + 400\frac{d^2}{l^2}\right)}.\sqrt{\frac{l}{\delta}} \ldots . (1)$$

und mit dem vorläufigen Durchschnittswerthe $\frac{l}{d} = 20$:

$$\frac{d}{\delta} = 0{,}1\sqrt[4]{12m}.\sqrt{\frac{l}{\delta}}.$$

Eine Formel von solcher Form hat Redtenbacher mit den Abmessungen gut ausgeführter Schubstangen verglichen und daraus die Regel:

$$\frac{d}{\delta} = 0{,}229\sqrt{\frac{l}{\delta}}$$

abgeleitet; ihr würde $m = 2{,}29$ d. h. eine 2,29 Mal so grosse Sicherheit der Schubstange gegen Zerknickung, als des Zapfens gegen Bruch entsprechen, abgesehen von der üblichen Verjüngung der Stange nach den Enden hin, wodurch ihre überwiegende Sicherheit etwas vermindert wird, indem dann d ihren grössten Durchmesser in der Mitte bedeutet.

Die Redtenbacher'sche Formel lässt sich schliesslich verbessern, indem man den ihr entsprechenden Werth von d als ersten Näherungswerth auf der rechten Seite von Gl. (1) zusammen mit $m = 2{,}29$ substituirt; dadurch wird:

$$\frac{d}{\delta} = 0{,}19\sqrt[4]{\frac{l}{\delta}\left(\frac{l}{\delta} + 21\right)}.$$

Für $\frac{l}{d} = 20$ stimmt diese Formel natürlich mit der Redtenbacher'schen überein, bei abweichenden Verhältnissen aber trägt sie diesen Abweichungen in angemessener Weise Rechnung; sie liefert z. B.*)

*) Ohne die für alle verhältnissmässigen Längen als gültig aufgestellte empirische Formel sub Nr. 147, welche hier benutzt wurde, müsste für $\frac{l}{\delta} = 12$, also $\frac{l}{d} = \frac{12}{0{,}85} = 14$ die Stange nach einer anderen Regel, als für grössere Längen, nämlich auf einfache Druckfestigkeit berechnet, folglich $\frac{d}{\delta}$ constant gesetzt werden, bis mit zunehmender Länge l

$$\text{für } \frac{l}{\delta} = 12 \quad 20 \quad 40$$

$$\frac{d}{\delta} = 0{,}85 \quad 1{,}02 \quad 1{,}34$$

während nach Redtenbacher $\frac{d}{\delta} = 0{,}79 \quad 1{,}02 \quad 1{,}45$.

150. — Gusseiserne Schubstangen haben gewöhnlich (abgesehen von einem Stücke = der Kurbellänge von mehr oder weniger abgeflachter Form zur Gestattung des dichten Vorbeistreifens der Kurbel) einen kreuzförmigen Querschnitt mit bogenförmiger Ausfüllung des Winkelraums zwischen den Kreuzrippen: Fig. 24.

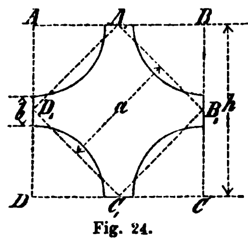


Fig. 24.

Angenommen, die Dicke b der Rippen sei so gewählt, dass das Trägheitsmoment J des mittleren (grössten) Querschnitts demjenigen des Quadrats $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ gleich ist, dessen Ecken mit den Mittelpunkten der Seiten des umbeschriebenen Quadrats $ABCD$ zusammenfallen. Ist dann a die Seite des inneren, h diejenige des äusseren Quadrats und haben

$$l \quad \lambda \quad \delta \quad P \quad n \quad n_1 \quad K$$

dieselben Bedeutungen wie in Nr. 149, so darf hier mit grösserem Rechte, als dort, die Bruchbelastung

$$= \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

gesetzt werden, weil $\frac{l}{h}$ jedenfalls grösser als 12, also $\frac{l}{a}$ grösser als 17 ist, während nach Nr. 146 schon mit $\frac{l}{a} = 10{,}5$ die Grenze zwischen einfacher Druck- und Zerknickungs-Festigkeit erreicht sein würde, und weil auch die Bestimmung des Verhältnisses

$$m = \frac{n}{n_1}$$

nach praktischer Erfahrung vorbehalten bleibt. Aus

$$nP = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} = \pi^2 \frac{E\frac{a^4}{12}}{l^2}$$

$$\text{und } n_1 P . \frac{\lambda}{2} = K \frac{\pi \delta^3}{32}$$

folgt dann durch Elimination von P mit $\frac{n}{n_1} = m$ und $a^2 = \frac{h^2}{2}$:

$$\left(\frac{h}{l}\right)^4 = \frac{3m}{\pi} \frac{K}{E} \frac{\delta}{\lambda} \left(\frac{\delta}{l}\right)^2$$

---

die Grenze zwischen Druck- und Zerknickungsfestigkeit erreicht wird, was hier bei ungefähr $\frac{l}{d} = 19$ der Fall ist (cf. Nr. 146). Eine solche Unterscheidung wäre aber, wie schon bemerkt, dem thatsächlichen Verhalten kaum entsprechend.

und mit $E = 1000000$, $K = 4000$, $\frac{\delta}{\lambda} = \frac{3}{4}$:

$$\frac{h}{l} = \sqrt{\frac{\delta}{l}\sqrt{\frac{m}{350}}}.$$

Diese Formel liefert Werthe, welche bewährten Ausführungen sich anschliessen, wenn entsprechend $m = 2{,}43$*) gesetzt wird:

$$\frac{h}{l} = \sqrt{\frac{\delta}{12l}}.$$

Die obige Voraussetzung, dass das Trägheitsmoment des kreuzförmigen Querschnitts demjenigen des Quadrats $A_1B_1C_1D_1$ gleich sei, würde genau zutreffen, wenn die Bögen aus den Eckpunkten des Quadrats $ABCD$ als Mittelpunkten beschrieben wären und dabei $\frac{h-b}{2h} = x$ die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel der Gleichung

$$x^4 - \frac{16}{3\pi}x^3 + x^2 - \frac{1}{4\pi} = 0,$$

$$\text{somit } x = 0{,}411, \text{ also } \frac{b}{h} = 1 - 2x = 0{,}178$$

wäre. In der That pflegt $\frac{b}{h}$ etwas kleiner und zwar im Durchschnitt $= \frac{1}{7}$ $= 0{,}143$ zu sein.**)

b. Körper von gleichem Widerstande.

151. — Wenn auch die Spannungen, welche unter der Voraussetzung einer sehr geringen Biegung in den verschiedenen Punkten des Stabes hervorgerufen werden, zugleich mit der Grösse dieser Biegung wenigstens vom praktischen Gesichtspunkte aus unbestimmt bleiben, indem sie sehr schnell wachsen, wenn die belastende Kraft P von einem gewissen Grenzwerthe aus nur sehr wenig zunimmt, und wenn auch deswegen die Verhältnisse so gewählt werden, dass der Eintritt irgend einer Biegung bei der vorausgesetzten Belastung theoretisch unmöglich wird, so könnte man sich doch die Aufgabe stellen, den Querschnitt des Stabes nach einem solchen Gesetze veränderlich zu machen, dass, wenn infolge übermässiger Belastung dennoch der Stab gebogen werden sollte, dabei die Maximalspannung, mithin die Gefahr des Bruchs durch Zerknickung in allen Querschnitten gleich gross sei. Bei einer Schubstange z. B. hat man diesen Zweck im Auge, indem man sie von der Mitte nach den Enden hin verjüngt, und das rationelle Gesetz dieser Verjüngung ist eben in der Lösung jener Aufgabe enthalten.

---

*) Diese noch grössere relative Sicherheit der Schubstange, als im vorigen Falle (Nr. 149), ist nur scheinbar, weil hier die Bruchbelastung $= \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$ grösser in Rechnung gestellt wurde, als dort nach der Formel sub Nr. 147.

**) Auch aus diesem Grunde ist also die Widerstandsfähigkeit der Schubstange etwas zu günstig in Rechnung gestellt worden und dadurch mit die scheinbar grosse relative Sicherheit $m = 2{,}43$ begründet.

Wird dabei der Fall **eines einerseits bei A befestigten, anderseits freien und am freien Ende B belasteten Stabes** und die Richtungslinie der Kraft P parallel der Tangente AX an die elastische Linie bei A vorausgesetzt (Fig. 23), in welchem Falle sich auch jede Hälfte der Schubstange befindet, wenn ihr Querschnitt von der Mitte gegen beide Enden hin in gleicher Weise veränderlich gemacht wird, so entspricht der Forderung, **dass die grösste Pressung in allen Querschnitten $= k$ sein soll**, die für jeden Querschnitt zu erfüllende Gleichung:

$$\frac{P(f-y)\,e}{J} + \frac{P}{F} = k,$$

unter e die Entfernung des am stärksten gepressten Punktes von der Biegungsaxe verstanden.

Vorausgesetzt wird, dass die Axen des kleinsten Trägheitsmomentes J aller Querschnitte unter sich parallel sind, somit Biegungsaxen werden; ferner sei r eine homologe Dimension aller Querschnitte, zu welcher deren übrige Dimensionen, sofern sie nicht constant sind, constante Verhältnisse haben. Dann sind e, F und J gegebene Functionen von r, und es ist also durch obige Bedingungsgleichung r als Function von $f - y$:

$$r = \varphi\,(f - y)$$

bestimmt. Die Aufgabe, r als Function von x zu finden, erfordert sonach die Bestimmung der elastischen Linie. Zu dem Ende hat man:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{P(f-y)}{EJ}$$

$=$ einer bekannten Function von $f - y$, weil J als Function von r auch als Function von $f - y$ bekannt ist. Durch Integration dieser Differentialgleichung, wobei die Constanten durch die zusammengehörigen Werthe:

$$x = 0;\; y = 0;\; \frac{dy}{dx} = 0$$

bestimmt sind, findet man die Gleichung der elastischen Linie, und wenn sich daraus

$$y = \psi\,(f, x)$$

entwickeln lässt, so ist:

$$r = \varphi\,[f - \psi\,(f, x)],$$

worin schliesslich f bestimmt ist durch die Gleichung:

$$f = \psi\,(f, x_1),$$

unter x_1 die Abscisse des Endpunktes B der elastischen Linie verstanden.

Letztere Gleichung liefert mit $f = 0$ ohne Zweifel auch hier, wie in Nr. 144 bei constantem Querschnitte, einen gewissen Grenzwerth von P, über welchen hinaus die Biegung erst möglich wird, und es entspricht diesem Grenzwerthe auch ein solcher von

$$k = \frac{P}{F_1},$$

wenn F_1 den äussersten Querschnitt oder die Endfläche des Stabes bei B bezeichnet.

Wenn man aber gar mit einer ähnlichen Annäherung, als mit welcher $x_1 = l$ gesetzt werden kann, wieder $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{d x^2}$ setzt und damit f unbestimmt findet*), so wird damit die Aufgabe überhaupt unbestimmt und zwar nicht nur in Betreff der absoluten, sondern selbst in Betreff der verhältnissmässigen Werthe von r, welche zugleich von dem bestimmten Drucke P und von dem unbestimmten Momente $P(f-y)$ abhängen würden. Um dies zu vermeiden und wenigstens bestimmte Verhältnisse der Werthe von r für die verschiedenen Querschnitte zu erhalten, könnte man sich damit begnügen wollen, denjenigen Theil der Maximalpressung für alle Querschnitte gleich zu machen, welcher blos von dem Momente $P(f-y)$, also von der Biegung des Stabes herrührt; allein dies würde darauf hinauslaufen, in dem Ausdrucke

$$\frac{(f-y)e}{J} + \frac{1}{F}$$

den zweiten Theil gegen den ersten, z. B. bei kreisförmigem Querschnitte

$$\frac{1}{\pi r^2} \text{ gegen } \frac{4(f-y)}{\pi r^3} \text{ oder } r \text{ gegen } 4(f-y)$$

zu vernachlässigen, was ganz unzulässig wäre, da $f-y$ zwischen den Grenzen 0 und f liegt und selbst der Maximalwerth $4f$ bei den in der Praxis vorkommenden Verhältnissen keineswegs viel Mal grösser, als r ist.

152. — Um für die Verjüngung einer Schubstange mit kreisförmigem Querschnitte von der Mitte nach den Enden hin eine wenigstens einigermassen rationelle Regel zu gewinnen, kann man sich darauf beschränken, der Forderung zu genügen, dass dieselbe Kraft P, welche den Stab im mittleren Querschnitte zerknicken kann, ihn an den schwächeren Enden zerdrücken würde. In Betreff des Gesetzes, nach welchem der grösste Radius r_0 des mittleren Querschnitts bei A (Fig. 23) in den kleinsten Radius r_1 am Ende B stetig abnehmend übergeht, möge dabei irgend eine willkürliche Annahme gemacht werden, welche die Schwierigkeit der Integration der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P(f-y)}{EJ}$$

möglichst zu vermindern geeignet ist und welche nur dem Umstande entspricht, dass der Axendurchschnitt des Stabes auch in der Mitte eine stetige Krümmung hat, dass also

$$\frac{dr}{dx} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ oder } y = 0$$

---

*) Die nähere Untersuchung wird dadurch sehr schwierig, dass die Gleichung

$$\frac{(f-y)e}{J} + \frac{1}{F} = \frac{k}{P},$$

aus welcher r behufs der Einsetzung in die Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P(f-y)}{EJ}$$

entwickelt werden müsste, in Beziehung auf r eine nicht reine cubische Gleichung ist, welche je nach dem Werthe von y zwischen den Grenzen 0 und f entweder eine oder drei reelle Wurzeln haben kann; jene Differentialgleichung erhält dadurch eine solche Form, dass von dem Versuche einer Integration abgestanden werden muss.

ist. Setzt man zu dem Ende

$$r = r_0 \sqrt[4]{(1-my)^n}, \text{ also } J = J_0\,(1-my)^n,$$

so liefert die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(f-y)}{EJ_0\,(1-my)^n}$$

durch eine erste Integration, wenn

$$\frac{P}{EJ_0} = a^2;\ 1-my = z$$

$$1-mf = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{4}{n}} = \alpha$$

gesetzt wird, mit Rücksicht darauf, dass für den Anfangspunkt der Coordinaten

$$z = 1;\ \frac{dz}{dx} = 0$$

ist:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2a^2\left[-\frac{\alpha}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{1}{(n-2)z^{n-2}} + \frac{\alpha}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right],$$

vorausgesetzt, dass n nicht $= 1$ oder 2 genommen wird. Wird deshalb die nächsteinfache Annahme: $n = 3$ gemacht, so folgt:

$$dx' = \frac{1}{a}\,\frac{-z\,dz}{\sqrt{-\alpha + 2z - (2-\alpha)z^2}}.$$

Die Integration dieser Gleichung zwischen den sich entsprechenden Grenzen:

$$x = 0,\ z = 1 \text{ und } x = l,\ z = \alpha,$$

unter l vorläufig die halbe Länge der Schubstange verstanden, liefert, wenn

$$\frac{1}{(2-\alpha)^2}\left[(1-\alpha)\sqrt{\alpha} + \frac{\frac{\pi}{2} + arc\,sin\,(1-\alpha)}{\sqrt{2-\alpha}}\right]^2 = f(\alpha)$$

gesetzt wird:

$$P = f(\alpha)\,\frac{EJ_0}{l^2},$$

eine Gleichung, welche für bestimmte Werthe von r_0 und r_1, also auch von $\alpha = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{4}{3}}$, die Bedingung dafür ausdrückt, dass die Kraft P den Stab bei irgend einer kleinen Biegung überhaupt im Gleichgewichte erhalten könne; in der That ist für den Specialfall eines constanten Querschnitts, d. h. für $\alpha = 1$: $f(\alpha) = \frac{\pi^2}{4}$ in Uebereinstimmung mit Nr. 137. Weil aber die Grösse der Biegung, nämlich f, unbestimmt bleibt, so ist wie früher zu schliessen, dass jene Grösse von P auch schon genüge, um den Bruch des Stabes durch Zerknickung herbeizuführen.

Bei kleineren Werthen von l genügt aber dazu jedenfalls ein noch kleinerer Werth von P, als jener, bei dessen Ableitung auf die von der Biegung unabhängige Pressung keine Rücksicht genommen werden konnte, und wenn deshalb analog der bewährt gefundenen empirischen Formel sub Nr. 147 der corrigirte Werth der Kraft, welche bei irgend einer Länge der Schubstange ihre Zerknickung im mittleren Querschnitte F_0 bewirkt,

$$= \frac{K''F_0 \,.\, f(\alpha)\,\frac{EJ_0}{l^2}}{K''F_0 + f(\alpha)\,\frac{EJ_0}{l^2}}$$

gesetzt wird, so muss dieser Ausdruck $= K'' F_1$ gesetzt werden als Bedingung dafür, dass dieselbe Kraft gerade im Stande sein soll, an den Enden die Schubstange einfach zu zerdrücken. So ergiebt sich:

$$\frac{F_0}{F_1} = 1 + \frac{K'' F_0 l^2}{f(\alpha) . E J_0} = 1 + \frac{4 K'' l^2}{f(\alpha) . E r_0^2}$$

oder, wenn jetzt mit l die ganze Länge der Schubstange, mit d ihr Durchmesser in der Mitte, mit d_1 derselbe an den Enden bezeichnet wird:

$$\left(\frac{d}{d_1}\right)^2 = 1 + \frac{4 K''}{f(\alpha) . E}\left(\frac{l}{d}\right)^2,$$

und daraus endlich mit $\frac{d_1}{d} = \alpha^{\frac{3}{4}}$:

$$\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] . f(\alpha) = F(\alpha) = \frac{4 K''}{E}\left(\frac{l}{d}\right)^2,$$

insbesondere für eine schmiedeeiserne Stange:

$$\left(\frac{l}{d}\right)^2 = 150 . F(\alpha),$$

entsprechend $E = 2000000$, $K'' = 3333$.

Wenn man hiernach für verschiedene Werthe von α die entsprechenden Werthe von $\frac{l}{d}$ und von $\frac{d_1}{d} = \alpha^{\frac{3}{4}}$ berechnet, so erhält man daraus umgekehrt für gegebene Werthe von $\frac{l}{d}$ die entsprechenden von $\frac{d_1}{d}$ durch Interpolation. Man findet für:

$\alpha =$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
$\frac{l}{d} =$	0	7,78	11,56	15,02	18,50	22,78	28,02
$\frac{d_1}{d} =$	1	0,924	0,846	0,765	0,682	0,595	0,503.

B. Einfach gekrümmter stabförmiger Körper.

153. — Die Mittellinie des Stabes sei ursprünglich (vor der Belastung) eine Curve von einfacher Krümmung; ihre Ebene enthalte die Richtungslinien aller äusseren Kräfte (cf. Nr. 125). Es wird ferner vorausgesetzt, dass diese Ebene und die in der Mittellinie selbst sie rechtwinkelig schneidende Cylinderfläche die Oerter der Schwerpunktshauptaxen aller Querschnitte seien, was insbesondere dann der Fall ist, wenn die Ebene der Mittellinie den Stab in zwei symmetrische Hälften theilt; bei der Belastung bleibt dann die Mittellinie eine ebene Curve, und die Biegungsebene, d. i. die Ebene der elastischen Linie oder deformirten Mittellinie fällt mit der ursprünglichen Mittellinie zusammen.

Vor der Belastung sei:

$O O_1 = ds$ ein Bogenelement,
r der entsprechende Krümmungshalbmesser,
$d\varphi$ der entsprechende Contingenzwinkel

der Mittellinie, also $ds = r d\varphi$.

F und F_1 seien die den Punkten O und O_1 entsprechenden Querschnitte,

η der Abstand eines Punktes A in F von der Biegungsaxe, positiv auf der convexen, negativ auf der concaven Seite der Mittellinie;

dann ist der gegenseitige Abstand AA_1 zwischen F und F_1, von A aus längs einer um die Krümmungsaxe mit dem Radius $r+\eta$ beschriebenen Cylinderfläche gemessen:

$$ds_\eta = (r+\eta)\,d\varphi = ds + \eta\,.\,d\varphi$$

und wenn er infolge der Belastung um die verhältnissmässig kleine Grösse

$$\varDelta ds_\eta = \varDelta ds + \eta\,.\,\varDelta d\varphi$$

sich ändert, so ist die Ausdehnung ε und entsprechende Spannung σ im Punkte A:

$$\varepsilon = \frac{\varDelta ds_\eta}{ds_\eta} = \frac{\varDelta ds + \eta\,.\,\varDelta d\varphi}{ds + \eta\,.\,d\varphi}\,;\ \sigma = E\varepsilon$$

oder mit

$$\frac{\varDelta ds}{ds} = \varepsilon_0\,;\ \frac{\varDelta d\varphi}{d\varphi} = \omega$$

$$\varepsilon\text{*)} = \frac{\varepsilon_0 + \omega\,\frac{\eta}{r}}{1+\frac{\eta}{r}}\,;\ \sigma = E\varepsilon.$$

154. — In diesem Ausdrucke von ε müssen ε_0 und ω mit Rücksicht auf das Gleichgewicht zwischen den Spannungen der verschiedenen Flächenelemente von F und dem System der äusseren Kräfte für diesen Querschnitt ausgedrückt werden. Ist zu dem Ende

P die algebraische Summe der zu F senkrechten Componenten der äusseren Kräfte, positiv oder negativ, jenachdem sie einem resultirenden Zug oder Druck entspricht,

M die Momentensumme dieser äusseren Kräfte in Beziehung auf die Biegungsaxe des Querschnitts F, positiv oder negativ, jenachdem auf Verstärkung oder Verminderung der Krümmung (Verkleinerung oder Vergrösserung von r) hinwirkend, und ist

dF ein unendlich schmaler Flächenstreifen des Querschnitts, im Abstande η parallel der Biegungsaxe,

---

*) Bei einem ursprünglich geraden Stabe ist $d\varphi = 0$, aber

$$\triangle d\varphi = \frac{ds\,(1+\varepsilon_0)}{\varrho},$$

unter ϱ den Krümmungsradius der elastischen Linie verstanden; also

$$\varepsilon = \frac{\triangle ds + \eta\,\frac{ds\,(1+\varepsilon_0)}{\varrho}}{ds} = \varepsilon_0 + (1+\varepsilon_0)\,\frac{\eta}{\varrho}.\quad \text{Cf. Nr. 41.}$$

so sind die Gleichgewichtsbedingungen (abgesehen von der in die Ebene von F fallenden resultirenden Schubkraft R: cf. Nr. 125):

$$P = \int \sigma dF; \quad M = \int \sigma dF \eta.$$

Bringt man den Ausdruck von ε zuvor auf die Form:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0) \frac{\frac{\eta}{r}}{1 + \frac{\eta}{r}} = \varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0) \frac{\eta}{r} \left(1 - \frac{\eta}{r} + \frac{\eta^2}{r^2} - \ldots\right),$$

so liefert die Substitution von $\sigma = E\varepsilon$ in obigen Gleichungen mit Rücksicht darauf, dass

$$\int dF = F; \int \eta dF = 0$$

ist, und wenn

$$\int \eta^2 dF = Ff^2; \int \eta^3 dF = Fg^3; \int \eta^4 dF = Fh^4 \ldots.$$

$$\text{und } \frac{f^2}{r^2} - \frac{g^3}{r^3} + \frac{h^4}{r^4} - \ldots = \alpha$$

gesetzt wird:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{EF}\left(P + \frac{M}{r}\right)$$

$$\omega = \frac{1}{EF}\left(P + \frac{M}{r}\frac{1+\alpha}{\alpha}\right).$$

155. — Die Substitution dieser Ausdrücke von ε_0 und ω in

$$\sigma = E\varepsilon = E\left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r + \eta}\right]$$

giebt für die **Spannung in einem beliebigen Punkte eines beliegen Querschnitts**:

$$F\sigma = P + \frac{M}{r} + \frac{M}{r\alpha}\frac{\eta}{r + \eta}.$$

Die grössten Absolutwerthe von σ finden in denjenigen Punkten eines Querschnitts statt, welche von der Biegungsaxe am weitesten entfernt sind; diese grössten Abstände seien e_1 für die convexe, e_2 für die concave Seite der elastischen Fläche, sofern nicht $e_1 = e_2$ ist und dann mit e bezeichnet wird.

Ist ϱ der **Krümmungsradius der elastischen Linie** im Punkte O, d. h. der durch die Deformation der Mittellinie geänderte Werth von r, so ergiebt sich aus

$$ds = r d\varphi$$

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} + \frac{\Delta r}{r}$$

oder

$$\varepsilon_0 = \omega + \frac{\varrho - r}{r}$$

und daraus:

$$\varrho = r - \frac{M}{EF\alpha}.$$

156. — **Wenn die Biegungsaxe den Querschnitt in zwei symmetrische Hälften theilt, so ist:**

$$\int \eta^3 dF = 0; \int \eta^5 dF = 0 \ldots$$

und

$$\alpha = \frac{f^2}{r^2} + \frac{h^4}{r^4} + \ldots$$

Insbesondere für einen rechteckigen Querschnitt findet man:

$$\alpha = \frac{1}{3}\frac{e^2}{r^2} + \frac{1}{5}\frac{e^4}{r^4} + \frac{1}{7}\frac{e^6}{r^6} + \ldots$$

und für einen Kreis oder eine Ellipse:

$$\alpha = \frac{1}{4}\frac{e^2}{r^2} + \frac{1}{8}\frac{e^4}{r^4} + \frac{5}{64}\frac{e^6}{r^6} + \ldots$$

Der Bruch $\frac{e}{r}$ ist gewöhnlich klein genug, um die Glieder mit den höheren Potenzen, als der vierten, vernachlässigen zu dürfen.

157. — Die Grössen P und M, welche bekannt sein müssen, um nach der Formel in Nr. 155 die Spannung σ in jedem Punkte berechnen zu können, enthalten neben den gegebenen primären auch die secundären äusseren Kräfte, d. h. die Reactionen von Stützpunkten und Befestigungen, welche häufig nur mit Rücksicht auf die Deformation der Mittellinie gefunden werden können.

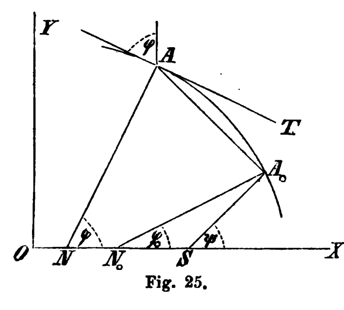


Fig. 25.

Sind zu dem Ende (Fig. 25) OX und OY rechtwinkelige Coordinatenaxen in der Mittelebene,

A_0 und A zwei Punkte der Mittellinie mit den Coordinaten x_0, y_0 und x, y,

φ_0 und φ die Winkel der x-Axe mit den Normalen $A_0 N_0$ und AN der Mittellinie in den Punkten A_0 und A,

so ist die Aenderung, welche die gegenseitige Neigung dieser Normalen durch die Deformation der Mittellinie erfährt:

$$\Delta (\varphi - \varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \omega \, d\varphi$$

und wenn diese Aenderung für ein Paar von Punkten A_0 und A den Bedingungen der Aufgabe gemäss gegeben ist, so erhält man dadurch bei Substitution des Ausdruckes von ω nach Nr. 154 eine Bestimmungsgleichung für die in P und M vorkommenden unbekannten Constanten.

Nöthigen Falls können ferner die Aenderungen

$$\Delta (x - x_0) \text{ und } \Delta (y - y_0)$$

der Coordinatenunterschiede in Betracht gezogen werden, welche vielleicht für dasselbe oder für ein anderes Paar von Punkten A_0 und A gegeben sind. Dieselben sind bedingt durch die kleinen Aenderungen ω und ε_0 für

alle Elemente des zwischenliegenden Bogens $A_0 A$ zusammen genommen. Was zunächst die Differentiale

$$d\Delta(x - x_0) \text{ und } d\Delta(y - y_0)$$

betrifft, welche von der Aenderung $\Delta d\varphi$ des Contingenzwinkels und der Ausdehnung ε_0 des Bogenelementes bei A herrühren, so wird vermöge der einer Drehung um die Biegungsaxe A gleich kommenden Aenderung $\Delta d\varphi$ der Punkt A_0 relativ gegen den Punkt A nach der Richtung $A_0 S$ der Senkrechten zur Sehne AA_0 verschoben und zwar um die Strecke $AA_0 . \Delta d\varphi$; vermöge der Ausdehnung ε_0 dagegen erfolgt eine relative Verschiebung parallel der Tangente AT im Punkte A um die Strecke $\varepsilon_0 ds$. Daraus ergiebt sich, wenn der Winkel $A_0 SX$ mit ψ bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} d\Delta(x_0 - x) &= - AA_0 . \Delta d\varphi . \cos\psi + \varepsilon_0 ds . \sin\varphi \\ &= - \Delta d\varphi\,(y - y_0) - \varepsilon_0\, dx; \\ d\Delta(y - y_0) &= AA_0 . \Delta d\varphi . \sin\psi + \varepsilon_0 ds . \cos\varphi \\ &= \Delta d\varphi\,(x_0 - x) + \varepsilon_0\, dy; \end{aligned}$$

folglich:

$$\Delta(x - x_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} y\omega\, d\varphi - y_0 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \omega\, d\varphi + \int_{x_0}^{x} \varepsilon_0\, dx$$

$$\Delta(y - y_0) = -\int_{\varphi_0}^{\varphi} x\omega\, d\varphi + x_0 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \omega\, d\varphi + \int_{y_0}^{y} \varepsilon_0\, dy,$$

worin für ε_0 und ω die Werthe aus Nr. 154 einzusetzen sind. Diese Gleichungen sind nur näherungsweise richtig, wenn unter den auf den rechten Seiten vorkommenden Coordinaten diejenigen der ursprünglichen Mittellinie verstanden werden; meistens ist aber die Deformation so gering, dass die so gewonnene erste Annäherung völlig ausreicht.

I. Krumme stabförmige Körper von constantem Querschnitte.

158. — Berechnung von Ringen, insbesondere Kettenringen, welche diametral gezogen werden.

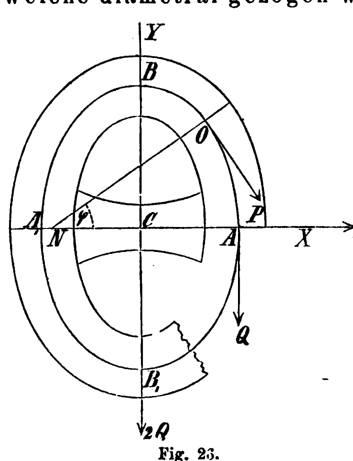


Fig. 26.

Die Mittellinie des Ringes (Fig. 26) ist eine in Beziehung auf zwei rechtwinkelige Axen CX und CY symmetrische geschlossene Curve mit den Halbaxen $CA = a$, $CB = b$. Bei B und B_1 wird der Ring, welcher im Sinne der x-Axe im Allgemeinen mit einem eingesetzten Stege versehen sei, durch die gleichen Kräfte $2Q$ nach den Richtungen CB resp. CB_1 gezogen. In den vier Quadranten sind unter diesen Umständen alle Verhältnisse gleich, und es brauchen dieselben nur für einen solchen Quadranten AB untersucht zu werden; insbesondere ist es die Aufgabe, die Spannungen σ_1 und σ zu ermitteln, welche im äussersten und innersten Punkte des beliebigen Querschnitts bei O (in den Abständen e_1 resp. e_2 von der

Biegungsaxe) stattfinden, zu welchem Zwecke zuvor die Grössen P und M für diesen Querschnitt gefunden werden müssen.

x, y sind die Coordinaten des Punktes O,

φ ist der Winkel zwischen der Normalen ON und der x-Axe.

Am Zustande des Quadranten AB wird nichts geändert, wenn man den Ring im Querschnitte B befestigt und im Querschnitte A zerschneidet, in der Schnittfläche aber die äussere Kraft Q nach der Richtung YC wirkend anbringt, ferner die Kraft S nach der Richtung CX wirkend = dem halben Gegendrucke, den der Steg dem auf ihn ausgeübten Drucke entgegensetzt (die andere Hälfte wirkt an dem weggeschnittenen Quadranten AB_1) und endlich ein Kräftepaar $[A]$, welches, positiv oder negativ jenachdem einer Verstärkung oder Verminderung der Krümmung entsprechend, dem Spannungsmomente des Querschnittes A gleich ist. Hiernach hat man:

$$P = Q\cos\varphi + S\sin\varphi$$
$$M = [A] + Q(a-x) - Sy = M_0 - Qx - Sy,$$

wenn

$$M_0 = [A] + Qa$$

gesetzt wird.

Werden A und B als die in Fig. 25 mit A_0 und A bezeichneten Punkte angenommen, so ist für sie $\Delta(\varphi-\varphi_0) = 0$, also

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\, d\varphi.$$

Ist der Ring ohne Steg, also $S = 0$, so ist durch diese Gleichung die einzige Unbekannte M_0 bestimmt; anderenfalls ist noch eine zweite Bestimmungsgleichung der Unbekannten M_0 und S nöthig, welche dadurch erhalten wird, dass die Verkürzung der Halbaxe CA:

$$-\Delta a = -\Delta(x_0 - x) = \Delta(x - x_0),$$

unter $x_0 = a$ und $x = 0$ die x-Coordinaten derselben Endpunkte A und B verstanden, auf doppelte Weise ausgedrückt werden kann.

Einmal ist nach Nr. 157:

$$-\Delta a = \Delta(x - x_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,\omega\, d\varphi + \int_a^0 \varepsilon_0 dx.$$

Anderseits ist $-\Delta a$ die Verkürzung des halben Steges unter der Einwirkung des Druckes $2S$, zu deren Berechnung mittlere Verhältnisse vorausgesetzt werden mögen, wie sie bei derartig ausgesteiften Kettengliedern vorzukommen pflegen. Ist der Querschnitt des Steges ein Rechteck,

β dessen constante Breite (senkrecht zur Ebene XY gemessen),

η die veränderliche Dicke oder Höhe im Abstande ξ von der Mitte C,

η_0 die kleinste Höhe in der Mitte, also für $\xi = 0$,

η_1 die grösste Höhe am Ende für $\xi = a_1$, unter

a_1 (etwas $< a$) die halbe Länge des Steges verstanden,

so ist, wenn noch E_1 den Elasticitätsmodul des Materials des Steges (gewöhnlich Gusseisen) bezeichnet:

$$-\Delta a = \int_0^{a_1} \frac{2S}{E_1\beta\eta}\, d\xi = \frac{2S}{E_1\beta}\int_0^{a_1} \frac{d\xi}{\eta}.$$

Daraus ergiebt sich, wenn

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 - n\xi^2}$$

als Gleichung der das Profil des Steges beiderseits begrenzenden Curve angenommen und die Constante n so bestimmt wird, dass $\eta_1 = \frac{3}{2}\eta_0$ ist:

$$-\Delta a = \frac{16}{9}\,\frac{S a_1}{E_1 F_1},$$

wo mit F_1 der kleinste Querschnitt $= \beta\eta_0$ bezeichnet ist. Wird endlich dieser letztere zum Querschnitte F des Ringes in das Verhältniss

$$\frac{F_1}{F} = \frac{16}{9\pi}$$

gesetzt (entsprechend dem gewöhnlichen Falle, dass F_1 ein Quadrat und dessen Seite $\beta = \eta_0 = \frac{2}{3}$ vom Durchmesser des cylindrischen Ketteneisens ist), so folgt:

$$-\Delta a = \pi\,\frac{S a_1}{E_1 F},$$

wofür schliesslich mit sehr kleinem Fehler*) gesetzt werden kann:

$$-\Delta a = \frac{3 S a}{E_1 F}.$$

Die zweite Bestimmungsgleichung der unbekannten Constanten M_0 und S ist dann:

$$\frac{3 S a}{E_1 F} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,\omega\,d\varphi + \int_a^0 \varepsilon_0\,dx.$$

159. — Kreisförmiger Ring ohne Steg.

In diesem einfachsten Specialfalle ist $a = b =$ dem Radius r der kreisförmigen Mittellinie;

$$P = Q\cos\varphi;\quad M = M_0 - Q r \cos\varphi.$$

Aus der Gleichung $0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\,d\varphi$ ergiebt sich:

$$M_0 = \frac{2 Q r}{(1 + \alpha)\pi}$$

und damit:

$$\sigma = \left[\frac{2}{(1+\alpha)\pi} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{(1+\alpha)\pi} - \cos\varphi\right)\frac{\eta}{r + \eta}\right]\frac{Q}{F}.$$

Die eminenten Werthe von σ finden statt in den äussersten und innersten Punkten ($\eta = e_1$ und $\eta = -e_2$) der Querschnitte bei A und B ($\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$); sie sind:

---

*) Ist auch im Allgemeinen $3a$ etwas $> \pi a_1$, so ist doch zu berücksichtigen, dass die Verkürzung der Dimension $CA = a$ streng genommen nicht von der Zusammendrückung des Steges allein herrührt, indem der Druck $2S$ sich mehr oder weniger in die Masse des Ringes hinein erstreckt und ausserdem auch schon durch die unmittelbare Wirkung des Zuges Q eine Zusammenziehung des Ringquerschnitts bei A bedingt wird.

$$\text{bei } A \begin{cases} \sigma_1 = \left[\dfrac{2}{(1+\alpha)\pi} - \dfrac{1}{\alpha}\left(1 - \dfrac{2}{(1+\alpha)\pi}\right)\dfrac{e_1}{r+e_1}\right]\dfrac{Q}{F} \\ \sigma_2 = \left[\dfrac{2}{(1+\alpha)\pi} + \dfrac{1}{\alpha}\left(1 - \dfrac{2}{(1+\alpha)\pi}\right)\dfrac{e_2}{r-e_2}\right]\dfrac{Q}{F} \end{cases}$$

$$\text{bei } B \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{2}{(1+\alpha)\pi}\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{e_1}{r+e_1}\right)\dfrac{Q}{F} \\ \sigma_2 = \dfrac{2}{(1+\alpha)\pi}\left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{e_2}{r-e_2}\right)\dfrac{Q}{F}. \end{cases}$$

Ist z. B. der Querschnitt des Ringes ein Kreis mit dem Radius $e_1 = e_2 = e$, so findet man die Coefficienten von $\frac{Q}{F}$, welche angeben, wie viel Mal die betreffende Spannung grösser ist, als die gleichförmig vertheilte Spannung eines durch die Kraft Q centrisch gezogenen Stabes von demselben Querschnitte F sein würde, für:

	A		B	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
$r = 3e$	$-2{,}634$	$7{,}124$	$5{,}892$	$-9{,}928$
$r = 4e$	$-4{,}010$	$8{,}353$	$8{,}403$	$-12{,}334$.

Ist $r > 4e$, so behalten die 4 eminenten Spannungen immer dieselbe Reihenfolge hinsichtlich ihrer absoluten Grösse wie für $r = 4e$, und es ist also überhaupt in allen vorkommenden Fällen ($r > 3e$) die negative Spannung des innersten Punktes bei B absolut genommen die grösste von allen. Ihr Absolutwerth k lässt sich auf die Form bringen:

$$k = \frac{2}{\pi}\left(4\frac{r}{e} + 3 + \frac{e}{r} + \frac{5}{4}\frac{e^2}{r^2} + \ldots\right)\frac{Q}{F}$$

und es ergiebt sich danach bei Vernachlässigung der nicht geschriebenen Glieder der Reihe,

z. B. für $\frac{r}{e}$ =	3	4	5	6
$k\frac{F}{Q}$ =	9,85	12,30	14,80	17,32.

160. — Ovale Kettenglieder von Rundeisen.

Bei gegebenen Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ der ovalen Mittellinie (Fig. 26) und unter sonst gleichen Umständen hat eine kleine Aenderung des geometrischen Charakters der Mittellinie ohne Zweifel nur einen untergeordneten Einfluss auf die Tragfähigkeit des Kettengliedes, und es wird insbesondere wenig darauf ankommen, ob die Curve AB als der Quadrant einer Ellipse oder als aus zwei Kreisbögen zusammengesetzt betrachtet wird, deren Mittelpunkte N und N_1 in CA und CB liegen, und welche in einem gewissen Punkte O_1 mit einer gemeinschaftlichen Tangente in einander übergehen: Fig. 27. Die letztere Form, welche hier vorausgesetzt werden soll, gestattet nicht nur eine leichtere Rechnung,

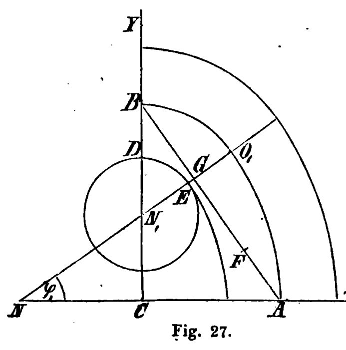


Fig. 27.

sondern ist sogar bei zweckmässiger Wahl der Verhältnisse der Ellipse vorzuziehen.

Sind $NA = r$ und $N_1B = r_1$ die Radien der beiden Kreisbögen AO_1 und BO_1 und ist $BD = e$ der Radius des Querschnitts des Rundeisens, woraus die Kette gebildet ist, so müssen, um ein Klemmen der in einander hängenden Kettenglieder zu verhüten, jene Kreisbögen, deren es bei gegebenen Werthen von a und b unendlich viele giebt, jedenfalls so gewählt werden, dass $N_1D \gtreqless e$, also

$$r_1 \gtreqless 2e$$

ist; man erhält aber eine Form, welche sich der Ellipse mit den Halbaxen a und b bei möglichst grossem Werthe von r_1 nahe anschliesst, wenn man die Radien r und r_1 der Bedingung gemäss bestimmt, dass

$$\frac{r_1}{r} = max.$$

ist. Diese Forderung führt zu den Werthen:

$$r = \frac{a^2 + b^2 + (b-a)\sqrt{a^2 + b^2}}{2a}$$

$$r_1 = \frac{a^2 + b^2 - (b-a)\sqrt{a^2 + b^2}}{2b}$$

entsprechend der folgenden Construction (Fig. 27):

$AF = b-a$; $BG = FG$; NN_1 senkrecht zu AB im Punkte G.

Diese Construction vorausgesetzt, wird der Bedingung

$$r_1 \gtreqless 2e$$

entsprochen, wenn die Verhältnisse

$$\alpha = \frac{a}{e} \text{ und } \beta = \frac{b}{e}$$

so gewählt werden, dass:

$$8\beta - (4-\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) \gtreqless 0$$

ist. Dem Ungleichheitszeichen entspricht eine Berührung der beiden aufeinander folgenden Kettenglieder in dem einzigen Punkte D, dem Gleichheitszeichen aber als Grenzfall eine gegenseitige Berührung in 2 Kreisbögen, die sich im Punkte D rechtwinkelig schneiden; DE (Fig. 27) ist die Hälfte eines dieser Kreisbögen. Diesem Grenzfalle möglichst nahe zu kommen, ist vortheilhaft, weil dadurch die Verstärkung der Krümmung des Bogens BO_1, welche mit vorzugsweise gefährlichen Spannungen im Querschnitte bei B verbunden ist, fast ganz verhindert wird.

161. — Bei einem Kettengliede ohne Steg muss jedenfalls $\alpha > 2$ und $\beta > 3$ sein; mit dem üblichen Werthe $\alpha = 2{,}5$ liefert die Gleichung

$$8\beta - (4-\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

$$\beta = \frac{16 \pm \sqrt{31}}{6} = \begin{cases} 3{,}595 \\ 1{,}739. \end{cases}$$

Die einzig hier brauchbare grössere Wurzel entspricht auch den üblichen Verhältnissen. Mit $\alpha = 2{,}5$ und $\beta = 3{,}6$ findet man

$$\frac{r}{e} = 4{,}8;\ \frac{r_1}{e} = 2$$

und, wenn (Fig. 27) $CN = c$, $CN_1 = c_1$ und Winkel $CNN_1 = \varphi_1$ gesetzt wird,

$$\frac{c}{e} = 2{,}3;\ \frac{c_1}{e} = 1{,}6;\ \varphi_1 = arc\, tg\frac{c_1}{c} = 34^0 50'.$$

Wenn nun auch unter diesen Verhältnissen von einer Veränderung der Krümmung des Bogens BO_1 keine Rede sein kann, so schliesst das doch nicht aus, dass der materiell gedachte Querschnitt bei O_1 wegen der Ausdehnung der äusseren und der Zusammendrückung der inneren Theile des dem Bogen BO_1 entsprechenden Ringstücks eine (jedenfalls negative) Aenderung $\Delta\varphi_1$ seiner Neigung gegen die x-Axe erfahren kann. Indem also hier für irgend einen Querschnitt des Ringstücks AO_1 nach Nr. 158

$$P = Q\cos\varphi;\ M = M_0 - Qx = M_0 - Q(r\cos\varphi - c)$$

ist, so hat man zur Bestimmung von M_0 die Gleichung:

$$\Delta\varphi_1 = \int_0^{\varphi_1} \omega\, d\varphi,$$

woraus mit dem Ausdrucke von ω nach Nr. 154 und wenn

$$\delta = \frac{EF}{Q}\,\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\frac{\Delta\varphi_1}{\varphi_1}$$

gesetzt wird, sich ergiebt:

$$\frac{M_0}{r} = Q\left(\delta + \frac{\sin\varphi_1}{(1+\alpha)\varphi_1} - \frac{c}{r}\right)$$

und dann durch Einsetzung der Werthe von P und M nach Nr. 155:

$$\sigma = \left[\delta + \frac{\sin\varphi_1}{(1+\alpha)\varphi_1} + \frac{1}{\alpha}\left(\delta + \frac{\sin\varphi_1}{(1+\alpha)\varphi_1} - \cos\varphi\right)\frac{\eta}{r+\eta}\right]\frac{Q}{F}.$$

Dieser Ausdruck, worin den oben bestimmten Verhältnissen des Ringes entsprechend

$$\alpha = 0{,}01109;\ \frac{1}{\alpha} = 90{,}171;\ \frac{\sin\varphi_1}{(1+\alpha)\varphi_1} = 0{,}92924$$

ist, gilt natürlich nur für $0 < \varphi < \varphi_1$; innerhalb dieser Grenzen finden ihmzufolge die eminenten Werthe von σ in den äussersten und innersten Punkten der Querschnitte bei A und O_1 statt, und es werden dieselben, wenn vorläufig $\Delta\varphi_1$, also auch δ = Null gesetzt wird, wie folgt gefunden:

$$\text{Querschnitt bei } A \left\{\begin{array}{ll} \eta = e; & \sigma_1 = -0{,}171\,\frac{Q}{F} \\ \eta = -e; & \sigma_2 = 2{,}608\,\frac{Q}{F} \end{array}\right.$$

$$\text{Querschnitt bei } O_1 \left\{\begin{array}{ll} \eta = e; & \sigma_1 = 2{,}615\,\frac{Q}{F} \\ \eta = -e; & \sigma_2 = -1{,}643\,\frac{Q}{F}. \end{array}\right.$$

Eine rationelle Berechnung von $\Delta\varphi_1$ ist wohl kaum möglich; nimmt man aber an, dass die Spannungsverhältnisse, wie sie im Querschnitte bei O_1 stattfinden, insbesondere also auch die eminenten Spannungen

$$\sigma_1 = m_1\frac{Q}{F} \text{ und } \sigma_2 = m_2\frac{Q}{F}$$

in unveränderter Weise bis zum Querschnitte bei B sich fortsetzen, so ist, vorausgesetzt, dass die materiellen Querschnitte überhaupt eben bleiben und wenn der Winkel

$$BN_1O_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 = \varphi_2$$

gesetzt wird, offenbar:

$$\Delta\varphi_1 = -\frac{1}{2e}\left[\frac{\sigma_1}{E}(r_1+e)\varphi_2 - \frac{\sigma_2}{E}(r_1-e)\varphi_2\right] = -(3\sigma_1-\sigma_2)\frac{\varphi_2}{2E} = -(3m_1-m_2)\frac{Q\varphi_2}{2EF}$$

$$\text{also } \delta = -(3m_1 - m_2)\frac{1}{2}\frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = -0{,}008782\,(3m_1 - m_2).$$

Wenn man nun vorläufig $m_1 = 2{,}615$ und $m_2 = -1{,}643$ setzt und mit dem so bestimmten δ die obigen 4 eminenten Spannungen auf's Neue berechnet, so findet man wesentlich andere Werthe, denen dann auch wieder ein anderer Werth von δ entspricht u. s. f; setzt man diese Rechnung fort bis zwei aufeinander folgende Werthe von δ in 4 Decimalstellen übereinstimmen, so ergiebt sich schliesslich: *)

$$\text{Querschnitt bei } A \begin{cases} \sigma_1 = -1{,}014\,\frac{Q}{F} \\ \sigma_2 = 3{,}766 \quad " \end{cases}$$
$$\text{Querschnitt bei } O_1 \begin{cases} \sigma_1 = 1{,}772 \quad " \\ \sigma_2 = -0{,}486 \quad " \end{cases}$$

162. — Bei einem Kettengliede mit Steg muss jedenfalls $\beta > 3 + \frac{1}{2}$ Höhe des Steges sein, und mit dem durchschnittlich üblichen Verhältnisse $\beta = 4$ liefert die Gleichung:

$$8\beta - (4-\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$
$$\alpha = 2{,}59.$$

Von der ziemlich umständlichen theoretischen Bestimmung der Maximalspannung ist hier kaum ein praktischer Gewinn zu erwarten, indem bei den üblichen Verhältnissen von dergl. Kettengliedern ihre Tragkraft nur wenig kleiner ist, als diejenige eines geraden Stabes vom Querschnitte $2F$. Nach Versuchen über die Tragkraft von Ankerketten mit ausgesteiften Gliedern, welche die englische Admiralität anstellen liess, ergab sich die Zugkraft, durch welche die Kette zerrissen wird, im Durchschnitte

$$2Q = 1{,}6\,KF,$$

---

*) Ob dieser Maximalwerth: $3{,}766\,\frac{Q}{F}$ oder der $\Delta\varphi_1 = 0$ entsprechende: $2{,}615\,\frac{Q}{F}$ Wahrheit näher kommt, ist wohl nur durch vergleichende Belastungsversuche eines solchen Kettengliedes und eines gleich dicken geraden Rundeisenstabes aus demselben Eisen zu entscheiden, wobei es hauptsächlich darauf ankommen würde, diejenigen Belastungen zu ermitteln, welche eben eine merklich bleibende Deformation zur Folge haben.

Schlieper in Grüne bei Iserlohn machen, wie Redtenbacher (Maschinenbau I, p. 129) anführt, für die von ihnen verfertigten Ketten die Angabe:

$$d = 0{,}032\,\sqrt{2Q},$$

unter d den erforderlichen Durchmesser in Centimetern des Ketteneisens für die Maximalzugkraft $= 2Q$ Kilogr. der Kette verstanden, und sie garantiren dabei vierfache Sicherheit gegen Zerreissen. Nach der ersten der obigen Rechnungsweisen ($\Delta\varphi_1 = 0$) würde sich die Maximalspannung der so proportionirten Kettenglieder $= 1626$, nach der zweiten $= 2341$ Kilogr. pro Quadratcent. ergeben, was, wenn jene Angabe zuverlässig ist, eher zu Gunsten der ersten, als der zweiten Rechnungsweise sprechen würde. Die Bruchbelastung giebt hier übrigens, selbst abgesehen von anderen Umständen, schon deswegen keinen sicheren Anhalt für die Beurtheilung der Theorie, weil die Dimension a sich vor dem Bruche wesentlich verkleinert und dadurch auch die Maximalspannung wesentlich kleiner wird.

Im Allgemeinen wird es zu empfehlen sein, den für die gegebene Maximallast $= 2Q$ der Kette passenden Durchmesser des Ketteneisens nach der Formel:

$$d = \frac{1}{25}\sqrt{2Q}$$

zu berechnen, entsprechend einer Maximalspannung $= 1040$ resp. 1498 Kil. pro Quadratcentimeter nach der ersten resp. zweiten Rechnungsweise.

unter K die absolute Festigkeit des betreffenden Eisens verstanden, welche im Mittel etwa 4300 Kil. pro Quadratcentim. betrug. Bliebe das Vertheilungsgesetz der Spannungen bis zum Bruche unverändert, so würde hieraus bei irgend einer auf das Kettenglied ausgeübten Zugkraft $2Q$ die Maximalspannung

$$= 1{,}25 \frac{Q}{F}$$

zu folgern sein.

163. — Berechnung eines Schwungringes, d. h. eines um seine geometrische Axe, mit welcher er durch symmetrisch vertheilte, radial gerichtete gerade Arme verbunden ist, mit einer gewissen Geschwindigkeit rotirenden kreisrunden Ringes. Die belastende Kraft ist hier die Centrifugalkraft, indem von der unmittelbaren Wirkung der Schwere abgesehen wird.

Der Querschnitt $= F_1$ jedes Arms wird ebenso wie derjenige $= F$ des Ringes als constant vorausgesetzt, und es seien ferner:

w die Winkelgeschwindigkeit,
r der Radius, $v = rw$ die Peripheriegeschwindigkeit der Mittellinie des Ringes,
E der Elasticitätsmodul, m die specifische Masse (Masse der Volumeinheit) des Materials, woraus der Ring besteht,
E_1 und m_1 die entsprechenden Grössen für das Material der Arme,
2γ der Winkel, unter welchem die Mittellinien CB und CB_1 (Fig. 28) zweier aufeinander folgender Arme gegeneinander geneigt sind.

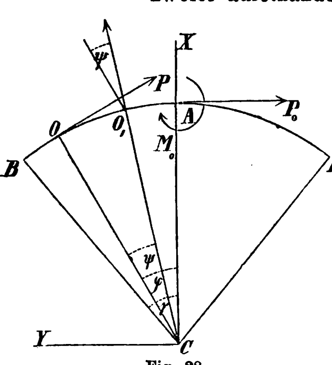


Fig. 28.

Ist CA die als x-Axe angenommene Mittellinie dieses Winkels, so brauchen nur die Spannungsverhältnisse des Ringstücks AB untersucht zu werden, indem sich dieselben $\frac{2\pi}{\gamma}$ Mal wiederholen. O sei ein beliebiger Punkt des Bogens AB der Mittellinie, Winkel $OCX = \varphi$, O_1 ein Punkt des Bogens AO, Winkel $OCO_1 = \psi$.

Im Querschnitte bei A findet keine Schubkraft, sondern nur eine resultirende Normalspannung $= P_0$ und ein resultirendes Spannungsmoment $= M_0$ statt, welche, äusserlich an der Schnittfläche angebracht, das Ringstück AB in unveränderter Art im Gleichgewichte erhalten, wenn durch den Querschnitt bei A ein Schnitt geführt wird.

Ist $Cd\psi$ die Centrifugalkraft eines Ringelementes zwischen zwei unter dem Winkel $d\psi$ gegen einander geneigten Querschnitten, so findet man mit den in Nr. 154 erklärten Bezeichnungen:

$$Cd\psi = \int w^2 . m . dF\,(r+\eta)^2\,d\psi = mFv^2\left(1+\frac{f^2}{r^2}\right)d\psi,$$

ferner, wenn

$$C - P_0 = A;\; P_0 + \frac{M_0}{r} = B$$

gesetzt wird:

$$P = P_0 \cos\varphi + \int_0^\varphi Cd\psi . \sin\psi = C - A\cos\varphi$$

$$M = M_0 + P_0 r (1 - \cos\varphi) - \int_0^{\varphi} C d\psi . r \sin\psi = r (B - C + A \cos\varphi)$$

und damit nach Nr. 155:

$$F\sigma = B + \frac{1}{\alpha} (B - C + A\cos\varphi) \frac{\eta}{r + \eta}.$$

Hieraus erkennt man, dass die eminenten und deshalb einzig zu berechnenden Spannungen in den äussersten und innersten Punkten der Querschnitte bei A und B stattfinden; um sie aber berechnen zu können, müssen zuvor die Werthe der Constanten A und B ermittelt werden, welche statt der ursprünglichen Unbekannten P_0 und M_0 eingeführt wurden. Zu dem Ende hat man nach Nr. 154:

$$\varepsilon_0 = \frac{B}{EF}; \quad \omega = \frac{1}{EF\alpha} [B (1 + \alpha) - C + A \cos\varphi]$$

und weil die Querschnitte bei A und B ihre gegenseitige Neigung nicht ändern, so ist

$$0 = \int_0^{\gamma} \omega \, d\varphi,$$

woraus die erste Bestimmungsgleichung:

$$0 = [B (1 + \alpha) - C] \gamma + A \sin\gamma \ldots (1)$$

hervorgeht. Eine zweite ergiebt sich daraus, dass die Verlängerung Δr des Arms CB auf doppelte Weise ausgedrückt werden kann. Erstlich ist nach Nr. 157, wenn hier A und B als die dort (Fig. 25) mit A_0 und A bezeichneten Punkte angenommen werden,

$$\Delta (y - y_0) = \Delta r . \sin\gamma = -\int_0^{\gamma} x \, \omega \, d\varphi + \frac{B}{EF} r \sin\gamma,$$

woraus durch Entwickelung des Integrals mit $x = r \cos\varphi$ und wenn

$$\frac{\cos\gamma}{2} + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\sin\gamma} - \frac{\sin\gamma}{\gamma} = f(\gamma)$$

gesetzt wird, unter Berücksichtigung von Gl. (1) die Gleichung hervorgeht:

$$EF \frac{\Delta r}{r} = B - A \frac{f(\gamma)}{\alpha}.$$

$\frac{\Delta r}{r}$ besteht aus 2 Theilen:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta_1 r}{r} + \frac{\Delta_2 r}{r}.$$

Der erste Theil rührt her von der nach CB gerichteten Wirkung R des Ringstücks, von welchem B die Mitte ist, nämlich (wenn hier der Winkel ψ von CB aus gerechnet wird):

$$R = 2 \int_0^{\gamma} C d\psi \cos\psi - 2 P_0 \sin\gamma = 2 A \sin\gamma$$

und es ist also, wenn der Arm als von der Axe bis zur Mittellinie des Ringes reichend in Rechnung gestellt wird:

$$\frac{\Delta_1 r}{r} = \frac{R}{E_1 F_1} = \frac{2 A \sin\gamma}{E_1 F_1};$$

der zweite Theil ist bedingt durch die Centrifugalkraft des Arms selbst und wird unter derselben Voraussetzung gefunden:

$$\frac{\Delta_2 r}{r} = \frac{C_1}{E_1 F_1}; \quad C_1 = \frac{m_1 F_1 v^2}{3}.$$

Die zweite Bestimmungsgleichung der Unbekannten A und B ist danach:*)

$$\frac{EF}{E_1 F_1}(2A\sin\gamma + C_1) = B - A\frac{f(\gamma)}{\alpha} \ldots (2).$$

164. — Gewöhnlich sind die Querdimensionen des Ringes im Vergleich mit r klein genug, um mit einem nur sehr kleinen Fehler

$$\alpha = \frac{f^2}{r^2} \text{ (cf. Nr. 154)}$$

setzen zu können, besonders wenn der Querschnitt F symmetrisch in Beziehung auf die Biegungsaxe ist (cf. Nr. 156). Wird dann noch

$$\frac{EF}{E^1 F_1} = p; \quad \frac{m_1 E}{3m E_1} = q,$$

also

$$\frac{EF}{E_1 F_1} \cdot \frac{C_1}{C} = \frac{q}{1+\frac{f^2}{r^2}} = \frac{q}{1+\alpha}$$

gesetzt, so erhält man aus den Gleichungen (1) und (2) der vorigen Nr.:

$$A = \frac{1-q}{\frac{\sin\gamma}{\gamma} + (1+\alpha)\left(\frac{f(\gamma)}{\alpha} + 2p\sin\gamma\right)} C = aC$$

$$B = \frac{1 - a\frac{\sin\gamma}{\gamma}}{1+\alpha} C = bC$$

und endlich mit $C = mFv^2(1+\alpha)$:

$$\sigma = \left[b + \frac{1}{\alpha}(b - 1 + a\cos\varphi)\frac{\eta}{r+\eta}\right] mv^2(1+\alpha)$$

Kilogr. pro Quadratmeter, wenn m und v durch das Kilogramm und Meter als Einheiten ausgedrückt werden.

Es sei z. B. $\gamma = 30^0 = 0{,}52360$, also $f(\gamma) = 0{,}00169$, 6 Armen entsprechend, ferner

$$E_1 = E \text{ und } m_1 = m, \text{ also } q = \frac{1}{3}$$

entsprechend einerlei Material von Ring und Armen,

$$F_1 = \frac{1}{3}F, \text{ also } p = 3,$$

der Querschnitt F ein Rechteck, dessen radiale Dimension $= \frac{r}{7}$, also

$$\frac{e}{r} = \frac{1}{14}; \quad \alpha = \frac{1}{3}\frac{e^2}{r^2} = \frac{1}{588} \text{ (cf. Nr. 156)},$$

so findet man

$$a = 0{,}1345; \quad b = 0{,}8700$$

$$\sigma = \left[0{,}8700 + 588(-0{,}1300 + 0{,}1345 . \cos\varphi)\frac{\eta}{r+\eta}\right] mv^2(1+\alpha),$$

---

*) Zur Ausgleichung des Fehlers, welcher dadurch begangen wurde, dass die wirksame Länge des Arms $= r$, also etwas zu gross gesetzt wurde, kann man bei der Anwendung seinen Querschnitt F_1 etwas grösser in Rechnung stellen, als er wirklich ist.

also mit $\varphi = 0$ und 30^0, $\eta = \pm e$:

$$\text{bei } A \begin{cases} \sigma_1 = 1{,}0464 \,.\, mv^2 (1 + \alpha) \\ \sigma_2 = 0{,}6665 \,. \quad " \end{cases}$$

$$\text{bei } B \begin{cases} \sigma_1 = 0{,}3408 \,. \quad " \\ \sigma_2 = 1{,}4805 \,. \quad " \end{cases}$$

Die Maximalspannung des Armes ist:

$$\frac{R + w^2 m_1 F_1 r \frac{r}{2}}{F_1} = 0{,}9026\, mv^2 (1 + \alpha).$$

Ist das Material Gusseisen, so ergiebt sich schliesslich die Maximalspannung des Ringes, welche im innersten Punkte des Querschnitts bei B stattfindet,

$$= \frac{1{,}4805}{10000} \frac{7200}{9{,}81} \left(1 + \frac{1}{588}\right) v^2 = 0{,}1088\, v^2 \text{ Kil. pro Quadratcentimeter,}$$

wenn v in Metern pro Secunde ausgedrückt ist.*)

II. Krumme Körper von veränderlichem Querschnitte.

165. — Als Beispiel diene ein Seil- oder Kettenhaken: Fig. 29.

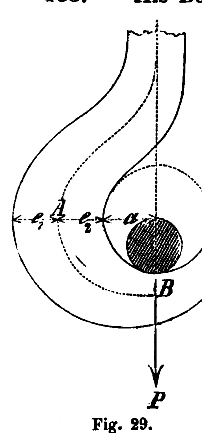


Fig. 29.

Der Veränderlichkeit des Querschnitts liegt die Idee zu Grunde, möglichst einen Körper von gleichem Widerstande herzustellen. Die Bestimmung des dieser Forderung entsprechenden Aenderungsgesetzes führt indessen, in der erforderlichen Weise angegriffen, zu Schwierigkeiten, welche mit der beschränkten Wichtigkeit der Sache nicht in Verhältniss stehen; jedenfalls dürften die Wirkungen der Schubkräfte dabei nicht ausser Acht gelassen werden und würde dann die Aufgabe in das siebente Capitel gehören. Für das praktische Bedürfniss genügt es indessen, nur die beiden Querschnitte bei A und B zu bestimmen, in deren erstem die Schubkräfte fehlen, während sie im anderen allein massgebend sind, und dann beide mit willkürlich stetigem Uebergange zu verbinden. Hier handelt es sich nur um den Querschnitt bei A.**)

---

*) Bei Vernachlässigung des Einflusses der Arme erhielte man mit $F_1 = 0$:

$$p = \infty\,;\; a = 0;\; b = \frac{1}{1+\alpha}$$

$$\sigma = \frac{r}{r+\eta}\, mv^2$$

für jeden Querschnitt, und die Maximalspannung in allen Punkten des inneren Umfangs:

$$\sigma_2 = \frac{r}{r-e}\, mv^2,$$

z. B. für den oben durchgerechneten Fall:

$$\sigma_2 = \frac{1}{10000} \frac{14}{13} \frac{7200}{9{,}81} v^2 = 0{,}0790\, v^2$$

Kilogr. pro Quadratcentimeter = 0,726 der wahren Maximalspannung.

**) Wegen des Querschnitts bei B siehe Nr. 182.

Ist a der Radius des Kreises, nach welchem der Mittelschnitt (Fig. 29) des Hakens von Innen begrenzt ist, so lässt sich für den Punkt A der Mittellinie setzen:

$$r = a + e_2$$

und es ist also nach Nr. 155, wenn P die den Haken belastende Kraft ist, wegen

$$P = P; \; M = -Pr$$

$$\sigma = -\frac{1}{\alpha}\frac{\eta}{a + e_2 + \eta}\frac{P}{F};$$

insbesondere im äussersten und innersten Punkte des Querschnitts bei A:

$$\sigma_1 = -\frac{1}{\alpha}\frac{e_1}{a + e_1 + e_2}\frac{P}{F}; \; \sigma_2 = \frac{1}{\alpha}\frac{e_2}{a}\frac{P}{F}.$$

166. — Bei **kreisförmigem Querschnitte** des Hakens mit dem Radius e bei A ist $e_1 = e_2 = e$ und σ_2 der grösste Absolutwerth von σ. Wird derselbe $= k$ gesetzt, so erhält man mit Rücksicht auf den Ausdruck von α nach Nr. 156, wovon hier wenigstens 3 Glieder berücksichtigt werden müssen, also

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(\frac{e}{a+e}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{e}{a+e}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{e}{a+e}\right)^6 + \ldots$$

zur Berechnung von $e = xa$ die Gleichung:

$$x\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \ldots\right] = \frac{4P}{\pi k a^2}.$$

Ist d der Durchmesser des Ketteneisens einer mit dem Haken zu verbindenden Kette von gleicher Tragkraft mit dem Haken, also nach Nr. 161:

$$d = \frac{1}{25}\sqrt{P},$$

so nimmt man passend $a = d$ bis $\frac{3}{2}d$

$$= \frac{1}{25}\sqrt{P} \text{ bis } \frac{3}{50}\sqrt{P};$$

und wenn d der Durchmesser eines in den Haken einzuhängenden Hanfseils von derselben Tragkraft, also nach Nr. 29:

$$d = \frac{1}{9}\sqrt{P}$$

ist, so pflegt $a = \frac{3}{4}d$ bis d

$$= \frac{1}{12}\sqrt{P} \text{ bis } \frac{1}{9}\sqrt{P}$$

genommen zu werden. Mit $k = 1400$ als der nach Nr. 14 keinenfalls zu überschreitenden Spannung des Schmiedeeisens findet man dann für den **Kettenhaken**

mit $a = d$	$a = \frac{3}{2}d$
$e = 1,392\ a$	$e = 0,944\ a$
$2e = 0,111\sqrt{P}$	$2e = 0,113\sqrt{P}$

und für den **Seilhaken**

mit $a = \frac{3}{4}d$	$a = d$
$e = 0,703\,a$	$e = 0,549\ a$
$2e = 0,117\sqrt{P}$	$2e = 0,122\sqrt{P}$.

VIERTES CAPITEL.

Schub-Elasticität und Festigkeit.

A. Beziehungen zwischen den Constanten der Schubelasticität und der Zug- oder Druckelasticität.

167. — Jede Aenderung der relativen Lage der materiellen Punkte eines Körpers kann auf positive oder negative Ausdehnungen ε zurückgeführt werden, welche in den verschiedenen Punkten des Körpers nach verschiedenen Richtungen hin stattfinden; eine Verschiebung γ (cf. Nr. 7) ist nur der Inbegriff eines bestimmten Systems von Ausdehnungen ε in demselben Punkte nach allen möglichen Richtungen, und es sind deshalb die Constanten der Schubelasticität nothwendiger Weise von denjenigen der Zug- oder Druckelasticität abhängig.

Ist γ die Verschiebung im Punkte A einer Ebene F, so wird das entsprechende, durch γ individualisirte System von Ausdehnungen im Punkte A bestimmt, indem man die Ausdehnung ε nach der beliebigen Richtung AB ausdrückt, welche eine gegebene Lage gegen die Ebene F und gegen die Verschiebungsrichtung derselben hat. Es seien zu dem Ende AX, AY, AZ rechtwinkelige Axen, AX und AY in der Ebene F, AX von gleicher Richtung mit der Verschiebung γ. Die Richtung AB bilde mit AZ den Winkel φ und die Projection AB' auf die Ebene XY mit AX den Winkel ψ.

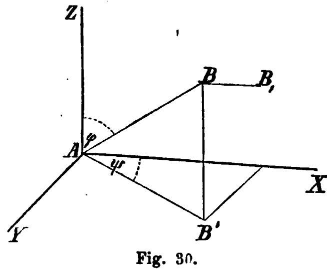


Fig. 30.

Sind dann noch dx, dy, dz die Coordinaten des Punktes B, $AB = ds$, so ist die Verschiebung von B gegen F:

$$BB_1 = \gamma dz$$

und die Ausdehnung ε nach der Richtung AB:

$$\varepsilon = \frac{BB_1 \,.\, cos\,(BAX)}{ds} = \frac{\gamma\, dz \,.\, sin\varphi\, cos\psi}{ds} = \gamma\, sin\varphi\, cos\varphi\, cos\psi.$$

Sie ist am grössten oder kleinsten für $\psi = 0$, $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$ und zwar:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}; \; max. \; \varepsilon = \varepsilon' = \frac{\gamma}{2}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}; \; min. \; \varepsilon = -\varepsilon'' = -\frac{\gamma}{2}.$$

Diese Beziehungen gelten allgemein, von welcher Art das Material des Körpers sein möge; ist es aber insbesondere isotrop, für welchen Fall allein die gegenseitige Abhängigkeit der betreffenden Constanten hier nachgewiesen werden soll,*) so folgt, dass der höchstens zulässige Werth von γ für irgend eine Ebene XY und irgend eine Verschiebungsrichtung AX derselben doppelt so gross ist, als der kleinere der für irgend eine Richtung AB höchstens zugelassenen Werthe von ε' oder ε''. Oder auch, wenn bei einem isotropen Material

k' der höchstens zugelassene Werth von $E\varepsilon'$,
k'' „ „ „ „ „ $E\varepsilon''$,
k der event. kleinere beider Werthe k' und k'',
G der Schubelasticitätsmodul (cf. Nr. 12) ist, so ist der höchstens zulässige Werth t einer Tangentialspannung τ:

$$t = 2\frac{G}{E}k.$$

168. — Das Verhältniss $\frac{t}{k}$ ist hiernach bedingt durch das Verhältniss der beiden Modul G und E. Um letzteres zu finden,**) sei das Quadrat ABA_1B_1 (Fig. 31) der zu dem einen Kantensysteme senkrechte Schnitt eines Würfels, von welchem jede Kante $= 1$ ist. Werden an den gegenüberliegenden Seitenebenen AB und A_1B_1 dieses Würfels die normalen Zugkräfte σ angebracht, so geht das Quadrat ABA_1B_1 in ein Rechteck über mit den Seiten:

Fig. 31.

$$AB_1 = 1 + \varepsilon; \; AB = 1 - \frac{\varepsilon}{m} \text{ (cf. Nr. 11)};$$

gleichzeitig findet in allen Punkten der Diagonalschnitte AA_1 und BB_1 eine Verschiebung γ nach der Richtung AA_1 resp. BB_1 statt, welche nach Nr. 8 = der kleinen Aenderung ist, die der ursprüng-

*) Das Holz als dasjenige technisch wichtige Baumaterial, welches auch nicht näherungsweise als isotrop gelten kann, hat zugleich eine solche Structur, welche es nöthig macht, die für jeden Fall in die Rechnung einzuführende Constante aus besonderen Versuchen abzuleiten, welche eben diesem Falle entsprechen. Ein stetiger Zusammenhang der kleinsten Theile nach allen Richtungen ist beim Holze nicht vorhanden, sondern es kommen zweierlei Widerstände ganz verschiedener Art in Betracht: die Elasticität und Festigkeit der Holzfasern an und für sich und des Bindemittels, wodurch sie unter sich zusammenhängen.

**) Cf. Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper, §. 3.

lich rechte Winkel der Diagonalen AA_1 und BB_1 erfahren hat. Es ist also:

$$tg\,(BB_1A) = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{m}}{1 + \varepsilon}$$

oder mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\gamma = \left(1 + \frac{1}{m}\right)\varepsilon = \frac{m+1}{m}\,\varepsilon.$$

Wird aber der Würfel in der Diagonalebene BB_1 zerschnitten, so erfordert das Gleichgewicht die Anbringung einer Normalkraft und einer Tangentialkraft in der Schnittebene, letztere $= \tau$ pro Flächeneinheit von solcher Grösse, dass

$$BB_1 \,.\, \tau = AB \,.\, \sigma \sqrt{\frac{1}{2}}, \text{ also } \tau = \frac{1}{2}\sigma$$

ist, und aus dieser und der obigen Gleichung folgt mit $\frac{\tau}{\gamma} = G$ und $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$:

$$G = \frac{1}{2}\,\frac{m}{m+1}\,E.$$

169. — Die Constante m, welche durch theoretische Entwickelungen von Navier, Poisson, Cauchy, Dienger u. A. übereinstimmend $= 4$ gefunden wurde, scheint den Versuchen von Wertheim und Regnault zufolge in der That etwas kleiner, auch für verschiedene Körper nicht ganz gleich zu sein. Bei diesen Versuchen wurde zugleich die Längen- und die Volumänderung hohler Stäbe infolge eines der Länge nach ausgeübten Zuges gemessen, die Volumänderung dadurch, dass die Höhlung mit einer Flüssigkeit angefüllt und mit einer Capillarröhre von bekannter Weite verbunden wurde, in welche die Flüssigkeit hineinreichte. Sind

l, d, v die Länge, die Weite und das Volumen der Höhlung im ursprünglichen Zustande,

Δl, Δd, Δv deren Aenderungen infolge des ausgeübten Zuges,

so folgt aus der Gleichung

$$\frac{v + \Delta v}{v} = \frac{(l + \Delta l)\,.\,(d + \Delta d)^2}{l d^2}$$

mit $\frac{\Delta d}{d} = -\frac{1}{m}\frac{\Delta l}{l}$ und bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$m = \frac{2\frac{\Delta l}{l}}{\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta v}{l}}.$$

Auf solche Weise fanden Wertheim und Regnault nahe übereinstimmend für Kupfer, Messing und Glas: $m = 3$. Nach späteren Versuchen von Wertheim ergab sich

für Messing: $m = 2{,}84$ bis $3{,}05$, im Mittel $m = 2{,}94$

für Eisenblech: $m = 3{,}25$ bis $4{,}05$, im Mittel $m = 3{,}64$

Bis auf Weiteres kann nur gesagt werden, dass für isotrope Körper im Allgemeinen

$$m = 3 \text{ bis } 4$$

sei, und ist damit nach Nr. 167 und 168:

$$\frac{t}{k} = \frac{m}{m+1} = \frac{3}{4} \text{ bis } \frac{4}{5}$$

$$\frac{G}{E} = \frac{1}{2}\frac{m}{m+1} = \frac{3}{8} \text{ bis } \frac{2}{5}.$$

170. — Die inneren Zustände, welche nach Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze eintreten, entziehen sich der theoretischen Untersuchung; insbesondere kann zwischen der Schubfestigkeit T' und der Zug- oder Druckfestigkeit K' und K'' eines Materials ein einfacher Zusammenhang nicht erwartet werden.

Directe Versuche über die Schubfestigkeit sind gleichwohl nur selten mit anderen Materialien angestellt worden, als mit Schmiedeeisen (wichtig wegen seiner Verwendung zu Keilen, Bolzen, Nieten etc.), wobei sich im Durchschnitte T nur wenig kleiner, als die unter sich selbst nahe gleichen Werthe K' und K'' ergeben hat, zuweilen indessen auch nur $T' = \frac{2}{3}K'$. Einige Versuche über die Schubfestigkeit des Holzes beziehen sich auf den Fall der Abschiebung nach der Richtung der natürlichen Fasern und haben insbesondere für Tannenholz nach Barlow ergeben:

$T = 42$ Kil. pro Quadratcentim.*)

B. Stabförmiger Körper unter dem Einflusse einer im Querschnitte wirkenden Schubkraft R.

I. Gesetz, nach welchem die Tangentialspannungen im Querschnitte vertheilt sind.

171. — Die Kraft R, von welcher vorausgesetzt wird, dass ihre Richtungslinie, in der Ebene des Querschnitts F liegend, durch den Schwerpunkt O desselben geht, bedingt Tangentialspannungen in den Flächenelementen von F, deren Resultante $= R$ ist. Dieselben können im Allgemeinen unter gewissen Winkeln gegen die Richtung von R geneigt sein, also in je zwei Componenten nach der Richtung von R und senkrecht dagegen zerfallen, so dass die Summe der ersteren Componenten $= R$ ist, während die letzteren für alle Elemente des ganzen Querschnitts zusammengenommen sich gegen-

*) Hiernach sind z. B. die erforderlichen Dimensionen des unteren Zapfens eines Dachsparrens sowie des Brüstungsholzes vor dem Zapfenloche zu beurtheilen, damit durch den horizontalen Sparrenschub weder der Zapfen ab-, noch das Brüstungsholz hinausgeschoben werde.

seitig aufheben (cf. Nr. 249—252); hier soll von den letzteren Componenten abstrahirt werden.

Um das Gesetz zu erkennen, nach welchem diese wie R gerichteten Tangentialspannungen von einem zum anderen Flächenelemente sich ändern, wird vorläufig ein stabförmiger Körper von endlicher Länge vorausgesetzt, auf welchen äussere Kräfte wirken von solcher Art, dass sie sich für einen Querschnitt F ersetzen lassen durch die oben genannte Resultante R in Verbindung mit einem Kräftepaare M, dessen Ebene den Querschnitt in der Richtungslinie von R rechtwinkelig schneidet. Letztere sei zudem eine Hauptaxe für den Schwerpunkt O von F, so dass die Biegungsaxe mit der anderen Hauptaxe und der Axe des Paares M zusammenfällt (cf. Nr. 120).

Von O aus werden die rechtwinkeligen Coordinatenaxen OX, OY, OZ so gezogen, dass die Ebene YZ in den Querschnitt und die Axe OY in die Biegungsaxe fällt. dF sei ein Flächenelement des Querschnitts im Abstande z parallel OY, seine Länge $= y$, also $dF = y\,dz$.

Es wird angenommen, dass die Tangentialspannung τ ebenso wie die Normalspannung σ in allen Punkten des Flächenstreifens dF gleich gross sei;*) sie ist zudem in jedem Punkte von einer ebenso grossen Tangentialspannung begleitet, welche in dem durch den betreffenden Punkt parallel der xy-Ebene gelegten Schnitte nach der Richtung der x-Axe stattfindet ($\tau_{xz} = \tau_{zx}$: cf. Nr. 10).

a. Gerader stabförmiger Körper.

172. — Betrachtet man das Körperelement, welches vom Querschnitte F, von einem im Abstande dx davon entfernten zweiten Querschnitte und von einem im Abstande z mit der xy-Ebene parallel geführten Schnitte begrenzt wird, so müssen, indem nach der x-Axe gerichtete äussere Kräfte nicht auf das Körperelement wirken, die entgegengesetzt gerichteten Normalspannungen der beiden erstgenannten Begrenzungsebenen

$$= \int_z^e \sigma dF \text{ und } \int_z^e \sigma dF + \frac{d}{dx}\left(\int_z^e \sigma dF\right).dx$$

(unter e den Maximalwerth von z verstanden) mit der gleichfalls nach der x-Axe gerichteten Tangentialspannung der dritten Begrenzungsebene

$$= \tau y\,dx$$

im Gleichgewichte sein, woraus mit $\sigma = \frac{Mz}{J}$ (Nr. 43) absolut genommen folgt:

$$\tau y = \frac{d}{dx}\left(\int_z^e \sigma dF\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{J}\int_z^e z\,dF\right).$$

*) Auch dies ist im Allgemeinen nicht nöthig und in der That nicht genau der Fall, wie die strengere Untersuchung im siebenten Capitel (Nr. 249—252) lehrt.

Dabei ist (Nr. 42 und 58) absolut genommen $\frac{dM}{dx} = R$, also auch, **wenn der Querschnitt constant ist:**

$$\tau y = \frac{R}{J}\int_z^e z\,dF.$$

Diese Gleichung, welche bei veränderlichem Querschnitte nur als Näherungsformel zu betrachten ist (der Wahrheit um so näher kommend, je kleiner die Aenderungen der Querdimensionen im Vergleich mit der Aenderung von x sind), lehrt, dass τy von der Biegungsaxe aus nach beiden Seiten abnimmt, also auch τ, wenn y nicht abnimmt. Wenn aber die Breite y selbst von der Biegungsaxe aus abnimmt, so kann es sein, dass τ zuerst zunimmt und seinen Maximalwerth in einer gewissen Entfernung auf beiden Seiten von der Biegungsaxe erreicht Für $z = e$ ist jedenfalls $\tau = 0$*), folglich eine Querschnittsform, für welche τ constant wäre, nicht möglich.

173 — Nach der Formel:

$$\tau = \frac{R}{Jy}\int_z^e z\,dF$$

findet man z. B. für einen **rechteckigen Querschnitt**, dessen Seiten parallel OY und OZ sind:

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{R}{F}\left(1 - \frac{z^2}{e^2}\right)$$

$$max.\tau = \frac{3}{2}\frac{R}{F} \text{ für } z = 0.$$

Für einen **Kreis** mit dem Radius e ist im Abstande z von der Biegungsaxe:

$$\tau = \frac{4}{3}\frac{R}{F}\left(1 - \frac{z^2}{e^2}\right)$$

$$max.\tau = \frac{4}{3}\frac{R}{F} \text{ für } z = 0.$$

Ist aber z. B. der Querschnitt ein **übereck liegendes Quadrat** (Diagonalen mit den Axen OY und OZ zusammenfallend), so ist nicht mehr τ in der Biegungsaxe am grössten, denn man findet:

$$\tau = \frac{R}{F}\left(1 + \frac{z}{e} - 2\frac{z^2}{e^2}\right)$$

$$max.\tau = \frac{9}{8}\frac{R}{F} \text{ für } z = \frac{e}{4}.$$

---

*) Wäre $y = 0$ für $z = e$, so würde aus der Gleichung $\tau = \frac{0}{0}$ folgen; allein für $z = e - dz$ wäre:

$$\tau y = \frac{R}{J}\,e\,dF = \frac{R}{J}\,ey\,dz;\ \tau = \frac{Re}{J}\,dz,$$

d. h. verschwindend klein. In der That wäre das Gegentheil nur dadurch möglich, dass an der Oberfläche des zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten enthaltenen Körperelements eine äussere Kraft von endlicher Grösse nach der Richtung der x-Axe wirkte.

Wenn die Breite y des Querschnitts in der Biegungsaxe am kleinsten ist, so kann der ebendaselbst stattfindende Maximalwerth von τ viel Mal grösser sein, als $\frac{R}{F}$. Bei einem doppelt-Tförmigen Querschnitte z. B. (Fig. 5, Nr. 48) ist für $b = b_1$ und $d = d_1$:

$$max. \tau = \frac{3}{4} \frac{R}{a} \frac{b e^2 - (b-a) f^2}{b e^3 - (b-a) f^3}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{R}{F} \frac{[b e - (b-a) f] \cdot [b e^2 - (b-a) f^2]}{a [b e^3 - (b-a) f^3]}.$$

Der Coefficient von $\frac{3}{2} \frac{R}{F}$ hat 1 zur Grenze, wenn a in die Grenze b oder f in die Grenze e übergeht; er wächst dagegen ins Unendliche, wenn $\frac{a}{b}$ bis Null abnimmt, und zwar um so schneller, je kleiner gleichzeitig $\frac{f}{e}$ ist.

174. — Wenn man von den verschiedenen Punkten der z-Axe aus die entsprechenden Werthe von σ und τ als gerade Linien parallel der x-Axe abträgt, so werden die Endpunkte der ersteren Linien durch eine Gerade OC, die Endpunkte der letzteren durch eine Curve AB (Fig. 32) verbunden; für den Fall eines rechteckigen oder kreisförmigen Querschnitts z. B. ist AB eine Parabel mit der Hauptaxe OX. Durch das Zusammenwirken von σ und τ in demselben Punkte wird nach den Regeln der zusammengesetzten Elasticität ein Maximalwerth der Ausdehnung ε nach einer gewissen Richtung in jenem Punkte bedingt (cf. Nr. 253), und es ist nicht nöthig, dass der grösste dieser Maximalwerthe von ε mit dem grössten Werthe $= k$ von σ (für $z = e$) oder mit dem grössten Werthe $= t$ von τ (in der Regel für $z = 0$) zusammentreffe. Wenn aber ebenso, wie für $\sigma = k$ immer $\tau = 0$ ist, auch umgekehrt für $\tau = t$ (wie u. A. beim rechteckigen und kreisförmigen Querschnitte) $\sigma = 0$ ist, und wenn ferner die Curve AB nicht etwa bis zu verhältnissmässig grossen Werthen von z nahe parallel der z-Axe verläuft (wie es bei einem in der Mitte eingeschnürten, z. B. dem doppelt-T förmigen Querschnitte der Fall ist), so lässt sich a priori erwarten und es wird durch die nähere Untersuchung (Nr. 259) bestätigt, dass behufs Ermittelung des absolut grössten Werthes von ε resp. $E\varepsilon$ ein nur kleiner Fehler begangen wird, wenn entweder die Tangentialspannungen oder die Normalspannungen ganz vernachlässigt werden, je nachdem nur wenig

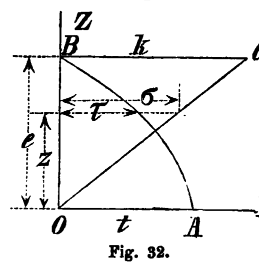


Fig. 32.

$$k > \frac{m+1}{m} t \text{ (cf. Nr. 169)}$$

ist.

Wenn insbesondere der Körper von der Länge l an einem Ende be-

festigt und am anderen, freien Ende durch eine Kraft P senkrecht zur Längenrichtung (zur x-Axe) angegriffen ist, so findet man, dass

$$k = \frac{m+1}{m} t = \frac{4}{3} t \text{ (mit } m = 3)$$

ist, wenn für den rechteckigen Querschnitt $l = \frac{1}{3} h$

" " kreisförmigen " $l = \frac{2}{9} h$

ist, unter h die nach der z-Axe gemessene Höhe des Rechtecks resp. den Durchmesser des Kreises verstanden.

Man sieht daraus, wie verhältnissmässig klein bei solchen Querschnittsformen die freie Länge eines stabförmigen Körpers schon werden darf, bevor die Vernachlässigung der Schubkraft R bei den Aufgaben des zweiten und dritten Capitels mit einem wesentlichen Fehler verbunden ist, und dass bei den dort bestimmten Körpern von gleichem Widerstande die Correction der Querschnitte sich auf die nächste Nähe desjenigen Querschnitts beschränken darf, für welchen $M = 0$ ist.

b. Einfach gekrümmter stabförmiger Körper.

Fig. 33.

175. — Es sei (Fig. 33) $OO_1 = ds$ ein Bogenelement der Mittellinie, deren Ebene, welche zugleich die Ebene des Momentes M ist, den krummen Körper symmetrisch theilt; C sei der entsprechende Krümmungsmittelpunkt, $CO = r$ der Krümmungshalbmesser, $OCO_1 = d\varphi$ der Contingenzwinkel. $AA_1 \, BB_1$ sei ein unendlich kleines Körperelement, enthalten zwischen den den Punkten O und O_1 entsprechenden Querschnitten und zweien um die Krümmungsaxe mit den Radien $r + z$ und $r + z + dz$ beschriebenen Cylinderflächen.

Die positiven Axen OX, OY, OZ (Nr. 171) seien so genommen, dass OX die Richtung OO_1, OZ die Richtung CO, OY die übliche Richtung der Axe einer im Sinne ZX stattfindenden Drehung hat. Die Kraft R und das Kräftepaar M seien algebraisch verstanden in der Weise, dass, wenn R und M betrachtet werden als Resultat desjenigen Systems der äusseren Kräfte, welche an dem vom Querschnitte YZ aus nach der Richtung OX gelegenen Körpertheile angreifen, R positiv ist, wenn nach OZ gerichtet, M dagegen positiv, wenn seine Axe nach OY gerichtet ist; ein positives M verstärkt dann die Krümmung der Mittellinie bei O, und es ist:

$$R = + \frac{dM}{ds}.$$

Die Schnittflächen

$$AB \qquad AA_1 \qquad A_1B_1 \qquad BB_1,$$

wodurch das Körperelement begrenzt ist, sind

$$= dz \qquad (r+z)\,d\varphi \qquad dz \qquad (r+z+dz)\,d\varphi$$

multiplicirt mit den betreffenden Breiten:

$$y \quad y \quad y + \frac{dy}{d\varphi}\,d\varphi \quad y + \frac{dy}{dz}\,dz,$$

und wenn die mit den Breiten multiplicirten Spannungen, welche auf die Seitenflächen AB und AA_1 des isolirt gedachten Körperelements nach den Richtungen der Pfeile σ, τ und τ (Fig. 33) wirken, mit

$$\sigma y \quad \tau y \quad \tau y$$

bezeichnet werden, so sind die entsprechenden, entgegengesetzt gerichteten Spannungen der gegenüberliegenden Seitenflächen A_1B_1 und BB_1 mit

$$\sigma y + \frac{d(\sigma y)}{d\varphi}\,d\varphi; \quad \tau y + \frac{d(\tau y)}{d\varphi}\,d\varphi; \quad \tau y + \frac{d(\tau y)}{dz}\,dz$$

zu bezeichnen.

Wegen des Gleichgewichts der Kräfte an dem betrachteten Körperelemente muss nun u. A. ihre Componentensumme nach $OX = 0$ sein, und diese Bedingung führt bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung zu der Gleichung:

$$\frac{d(\sigma y)}{d\varphi} + (r+z)\,\frac{d(\tau y)}{dz} + 2\tau y = 0$$

oder mit $ds = r\,d\varphi$:

$$\frac{d(\tau y)}{dz} + \frac{2}{r+z}\,\tau y = -\frac{r}{r+z}\,\frac{d(\sigma y)}{ds}.\text{*)}$$

176. — Für eine **gerade Mittellinie** geht diese Gleichung mit

$$r = \infty\ ;\ ds = dx$$

über in:

$$\frac{d(\tau y)}{dz} = -\frac{d(\sigma y)}{dx}$$

$$\frac{d(\tau y)}{dz}\,dz = -\frac{d(\sigma y\,dz)}{dx} = -\frac{d(\sigma dF)}{dx},$$

---

*) Von den beiden übrigen Gleichgewichtsbedingungen des hier vorliegenden Systems von Kräften in einer Ebene führt die = Null gesetzte Componentensumme nach der Richtung OZ zu der Gleichung:

$$\frac{d(\tau y)}{d\varphi} = \sigma y$$

und bestimmt sonach das Aenderungsgesetz von τ nach der Richtung OX, welches übrigens von selbst sich ergiebt, wenn erst für jeden einzelnen Querschnitt τ als Function von z bekannt ist.

Die Momentengleichung für irgend eine auf der Kraftebene ZX senkrechte Axe führt zu einer identischen Gleichung; sie würde die Relation $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ geliefert haben, wenn dieselbe nicht schon im Ansatz der Gleichung als bekannt vorausgesetzt worden wäre. —

Es muss übrigens bemerkt werden, dass die Gleichung

$$\frac{d(\tau y)}{d\varphi} = \sigma y$$

nur durch die Annahme hier überflüssig wird, dass das Vertheilungsgesetz der Normalspannungen σ dasselbe sei, welches sich in den vorhergehenden Capiteln bei Vernachlässigung der Schubkraft R auf Grund der Voraussetzung eines stets eben und zur elastischen Linie senkrecht bleibenden Querschnitts ergeben hatte. Wenn nun auch streng

woraus, weil $\tau y = 0$ ist für $z = e$,

$$\tau y = -\int_e^z \frac{d(\sigma dF)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_z^e \sigma dF$$

folgt, d. i. dieselbe Gleichung, welche für diesen Fall in Nr. 172 schon angeführt wurde, und welche auch näherungsweise gelten kann, wenn r im Vergleich mit e sehr gross ist.

177. — Ist aber $\frac{r}{e}$ nicht sehr gross, so hat man nach Nr. 155 mit $P = 0$:

$$\sigma = \frac{M}{Fr}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{z}{r+z}\right),$$

also mit $\frac{dM}{ds} = R$, wenn sowohl der Querschnitt, als auch der Krümmungsradius r constant sind oder wenn näherungsweise von der event. geringen Veränderlichkeit dieser Elemente abgesehen wird:

$$\frac{d(\sigma y)}{ds} = \frac{Ry}{Fr}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{z}{r+z}\right).$$

Dadurch wird die in Nr. 175 gewonnene Differentialgleichung zur Bestimmung von τ:

$$\frac{d(\tau y)}{dz} + \frac{2}{r+z}\tau y = -\frac{Ry}{F(r+z)}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{z}{r+z}\right).$$

Ihre allgemeine Form ist:

$$\frac{d(\tau y)}{dz} + \tau y \,.\, f(z) = \varphi(z)$$

mit dem bekannten Integral (unter e hier die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden):

$$\tau y = e^{-\int f(z).dz} \,.\, \left[\int\left(e^{\int f(z).dz} \,.\, \varphi(z)\,.\,dz\right) + C\right],$$

und die Einsetzung der Werthe von $f(z)$ und $\varphi(z)$ liefert:

$$(r+z)^2\tau y = -\frac{R}{F}\left(r\int dF + \frac{1+\alpha}{\alpha}\int z dF\right) + C.$$

Die Constante C ist bestimmt

für positive Werthe von z durch: $z = e_1$; $\tau y = 0$

„ negative „ „ „ „ : $z = -e_2$; $\tau y = 0$;

damit wird, wenn im einen oder anderen Falle e_1 resp. e_2 durch e bezeichnet wird:

$$\tau y = \frac{R}{F(r+z)^2}\cdot\left(r\int_z^{\pm e} dF + \frac{1+\alpha}{\alpha}\int_z^{\pm e} z dF\right)$$

---

genommen diese willkürliche Annahme eben durch jene Gleichung ersetzt werden müsste, um so ein System von zwei Differentialgleichungen zur gleichzeitigen Bestimmung der sich gegenseitig bedingenden Spannungen σ und τ zu erhalten, so ist doch ein praktisches Bedürfniss zu einer solchen Complication der Aufgaben einstweilen nicht vorhanden.

oder, wenn z absolut genommen wird:

$$\tau y = \frac{R}{F(r \pm z)^2}\left(\pm r \int_z^e dF + \frac{1+\alpha}{\alpha}\int_z^e z\,dF\right).$$

Beim Durchgange durch die Biegungsaxe (Breite daselbst $= y_0$) fände hiernach ein plötzlicher Zuwachs von τ statt um den Betrag:

$$\Delta\tau = \frac{R}{Fry_0}\left(\int_0^{e_1} dF + \int_0^{e_2} dF\right) = \frac{R}{ry_0}.$$

Inwiefern etwa dieses auffallende Resultat der Unvollkommenheit der Theorie zur Last fällt, möge dahingestellt bleiben; im Folgenden soll einfacher gesetzt werden:*)

$$\tau y = \frac{R}{F(r \pm z)^2}\frac{1}{\alpha}\int_z^e z\,dF,$$

wodurch die Bedingung, dass $\tau y = 0$ sein muss für $z = e_1$ resp. e_2, gewahrt bleibt unter Beseitigung der Discontinuität der Spannungen in der Biegungsaxe, und wodurch jedenfalls ein um so geringerer Fehler begangen wird, je grösser r ist. Denn wegen

$$\alpha = \frac{f^2}{r^2} - \frac{g^3}{r^3} + \ldots \text{ und } Ff^2 = J$$

geht sowohl die oben entwickelte, als die hier dafür substituirte Formel in die Gleichung:

$$\tau y = \frac{R}{J}\int_z^e z\,dF \quad \text{(Nr. 172)}$$

über, wenn man r ohne Ende wachsen lässt.

178. — Für einen rechteckigen Querschnitt findet man hiernach

$$\tau = \frac{R}{F}\frac{1}{2\alpha}\frac{e^2 - z^2}{(r \pm z)^2}$$

am grössten auf der concaven Seite der Mittellinie im Abstande $= \frac{e^2}{r}$ von der Biegungsaxe, also

$$max.\tau = \frac{R}{F}\frac{1}{2\alpha}\frac{\frac{e^2}{r^2}}{1 + \frac{e^2}{r^2}}$$

---

*) Wollte man setzen:

$$\tau y = \frac{R}{F(r \pm z)^2}\frac{1+\alpha}{\alpha}\int_z^e z\,dF,$$

so würde, wie die Probe lehrt,

$$\int_0^{e_1} \tau y\,dz + \int_0^{e_2} \tau y\,dz = (1+\alpha)R$$

sein anstatt $= R$, wie es sein muss und wie es sowohl bei der oben entwickelten, als bei der hier dafür substituirten Formel der Fall ist.

oder mit $\alpha = \frac{1}{3}\frac{e^2}{r^2} + \frac{1}{5}\frac{e^4}{r^4} + \dots$ (Nr. 156):

$$max.\,\tau = \frac{3}{2}\frac{R}{F}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{e^2}{r^2} + \dots\right).$$

Für einen kreisförmigen Querschnitt ist:

$$\tau = \frac{R}{F}\frac{1}{3\alpha}\frac{e^2 - z^2}{(r \pm z)^2}$$

am grössten auch auf der concaven Seite im Abstande $= \frac{e^2}{r}$ von der Biegungsaxe:

$$max.\,\tau = \frac{R}{F}\frac{1}{3\alpha}\frac{\frac{e^2}{r^2}}{1 + \frac{e^2}{r^2}}$$

oder mit $\alpha = \frac{1}{4}\frac{e^2}{r^2} + \frac{1}{8}\frac{e^4}{r^4} + \frac{5}{64}\frac{e^6}{r^6} + \dots$ (Nr. 156):

$$max.\,\tau = \frac{4}{3}\frac{R}{F}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{e^2}{r^2} + \frac{7}{16}\frac{e^4}{r^4} + \dots\right).$$

II. Einfache Schub-Elasticität und Festigkeit eines stabförmigen Körpers.

179. — Darunter wird der Fall verstanden, dass das auf Biegung hinwirkende Kraftmoment M verschwindend klein ist gegen die Schubkraft R, und dass mithin durch letztere allein die Anstrengung des Materials bedingt ist. Da das im Vorhergehenden sub I. ermittelte Vertheilungsgesetz der Tangentialspannung im Querschnitte von der Grösse des Momentes M nicht abhängig gefunden wurde, so muss man schliessen, dass es auch im vorliegenden Grenzfalle $M = 0$ noch zutreffe.

Die betreffenden Werthe der grössten Tangentialspannung τ mögen zunächst dazu benutzt werden, die frühere Untersuchung einiger vorzgusweise auf Biegungs-Elasticität in Anspruch genommener Körper gleichen Widerstandes insofern zu corrigiren, als ihre früher nur angedeutete erforderliche Verstärkung in den Querschnitten $M = 0$ näher bestimmt werden soll. Ist aber

a der Werth der veränderlichen Dimension in demjenigen Querschnitte, für welchen M am grössten,
a_1 derselbe in demjenigen Querschnitte, für welchen $M = 0$ ist,
k der Maximalwerth von σ im ersteren,
t „ „ „ τ im letzteren Querschnitte,

so ist, wenn in beiden das Material in gleichem Grade in Anspruch genommen werden soll, das Verhältniss $\frac{a_1}{a}$ bestimmt durch die Gleichung:

$$k = \frac{m+1}{m}t \quad \text{(cf. Nr. 169),}$$

sofern von der im ersteren Querschnitte gleichzeitig etwa vorhandenen Schubkraft ohne in Betracht kommenden Fehler abgesehen werden kann.

180. — Wenn insbesondere der Körper AB bei A befestigt und am freien Ende B durch eine Kraft senkrecht zur Längenrichtung $AB = l$ angegriffen ist, so findet man für den Fall eines rechteckigen Querschnitts von constanter Breite (Nr. 111), wenn
h die Höhe bei A,
h_1 „ „ „ B ist:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{m+1}{4m}\frac{h}{l} = \frac{1}{3}\frac{h}{l} \text{ mit } m = 3;$$

für den Fall eines rechteckigen Querschnitts von constanter Höhe h (Nr. 112), wenn
b die Breite bei A,
b_1 „ „ „ B ist:

$$\frac{b_1}{b} = \frac{m+1}{4m}\frac{h}{l} = \frac{1}{3}\frac{h}{l} \text{ mit } m = 3;$$

für den Fall eines kreisförmigen Querschnitts (Nr. 113), wenn
r der Radius bei A,
r_1 „ „ „ B ist:

$$\frac{r_1}{r} = \sqrt{\frac{m+1}{3m}\frac{r}{l}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{r}{l}} \text{ mit } m = 3.$$

181. — Der Körper AB sei beiderseits unterstützt.

Bei Belastung in einem gewissen Punkte C zwischen A und B (Nr. 115) verhalten sich dann beide Theile AC und BC wie wenn sie bei C befestigt und bei A resp. B durch eine Kraft = dem Stützendrucke angegriffen würden: cf. Nr. 180.

Ist aber die Last beweglich, so dass ihr Angriffspunkt C jede Lage zwischen A und B annehmen kann (Nr. 116), so muss für den Fall eines rechteckigen Querschnitts von constanter Breite, wenn
h dessen Höhe in der Mitte von AB,
h_1 „ „ an den Enden A und B,
a die halbe Länge AB ist:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{m+1}{2m}\frac{h}{a} = \frac{2}{3}\frac{h}{a} \text{ mit } m = 3$$

sein. Dasselbe Verhältniss entspricht der Forderung für den Fall einer gleichförmig auf der ganzen Länge $AB = 2a$ vertheilten Belastung bei gleichfalls rechteckigem Querschnitte von constanter Breite (Nr. 117).

Besteht aber in diesem Falle gleichförmig vertheilter Belastung der Träger $AB = 2a$ aus zwei bogenförmigen flachen Gurten mit constanten Querschnitten (Nr. 118), die hier einander gleich $= F$ vorausgesetzt werden sollen, und ist h die Bogenhöhe (halbe Höhe des Trägers) in der Mitte, so muss der rechteckige Gesammtquerschnitt $= 2F_1$ der ver-

einigten Gurte an den Enden A und B mindestens so gross gemacht werden, dass

$$\frac{F_1}{F} = 3\frac{m+1}{m}\frac{h}{a} = \frac{4h}{a} \text{ mit } m = 3$$

ist; eine Verstärkung der Gurte wird also hier nöthig, wenn $a < 4h$ ist.

182. — Als Ergänzung der Berechnung eines Seil- oder Kettenhakens mit kreisförmigem Querschnitte (Nr. 166) ist noch der erforderliche Radius e_1 des Querschnittes bei B (Fig. 29), in welchem die Belastung P lediglich als Schubkraft wirkt, zu bestimmen. Setzt man zu dem Ende

$$e_1 = ya;\ r = a + e_1 = (1+y)\,a,$$

so ist nach Nr. 178 die grösste Tangentialspannung im Querschnitte B

$$= \frac{4}{3}\,\frac{P}{\pi y^2 a^2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{1+y}\right)^2 + \frac{7}{16}\left(\frac{y}{1+y}\right)^4 + \ldots\right]$$

und indem dieselbe auch $= \frac{m}{m+1}\,k$ sein soll, unter k die grösste Normalspannung σ im Querschnitte A (Radius $= e$) verstanden, so hat man für y die Gleichung:

$$y^2 = \frac{m+1}{m}\,\frac{4P}{3\pi k a^2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{1+y}\right)^2 + \frac{7}{16}\left(\frac{y}{1+y}\right)^4 + \ldots\right].$$

Daraus ergiebt sich mit $m = 3$ und $k = 1400$

für den Kettenhaken mit $a = \frac{1}{25}\sqrt{P}$ bis $\frac{3}{50}\sqrt{P}$

$$e_1 = 0{,}518\,a \quad „ \quad 0{,}341\,a$$
$$= 0{,}372\,e \quad „ \quad 0{,}361\,e;$$

für den Seilhaken mit $a = \frac{1}{12}\sqrt{P}$ bis $\frac{1}{9}\sqrt{P}$

$$e_1 = 0{,}244\,a \quad „ \quad 0{,}182\,a$$
$$= 0{,}347\,e \quad „ \quad 0{,}331\,e.$$

Zur Sicherung gegen eine zufällig etwas schiefe Richtung der Kraft P, wodurch auch im Querschnitte B ein Moment M hinzukommt, kann man $\frac{e_1}{e}$ etwas grösser rechnen.

183. — Vernietung von Blechen.

Bei dem gewöhnlichen Verfahren der warmen Nietung, wobei das Niet rothglühend durch die sich entsprechenden Nietlöcher getrieben und aus dem vorstehenden Theile des Schaftes der Schliesskopf durch Hämmern gebildet wird, ist es nicht die auf das Niet wirkende Schubkraft allein, welche seine Spannung bei der fertigen und belasteten Construction bedingt; zum Theil ist diese Spannung eine durch die Zusammenziehung des erkaltenden Nietes verursachte Längenspannung, und es kann infolge der dadurch bedingten ebenso grossen Pressung zwischen den vernieteten Blechen und den Nietköpfen sogar der Fall sein, dass die dieser Pressung entsprechende Reibung die Schubkraft ganz aufhebt und die Tangentialspannung im Nietquerschnitte gar nicht zur Entwickelung kommen lässt.

Die Grösse jener Längenspannung ist indessen von so verschiedenen und zum Theil nur so unsicher in Rechnung zu stellenden Umständen (von dem Temperaturgrade, dem Ausdehnungscoefficienten und der Länge des Nietschaftes,

von dem bei der Stauchung des Schliesskopfes auf den Setzkopf des Nietes ausgeübten Gegendrucke, von der Miterwärmung der umgebenden Blechtheile durch das heisse Niet, von der Zusammendrückbarkeit des Blechs etc.) abhängig, dass es nur durch Versuche und zwar indirect durch Messung der entsprechenden Reibung möglich ist, ein sicheres Urtheil darüber zu gewinnen. Solche Versuche haben ergeben, dass die Reibung in jeder der beiden einem Niete angehörigen Reibungsflächen wenigstens 500, also die Längenspannung des Niets bei einem auf höchstens $= \frac{1}{3}$ zu schätzenden Reibungscoefficienten wenigstens 1500 Kilogr. pro Quadratcentimeter des Nietquerschnitts beträgt, eine Spanuugg, bei welcher sehon an sich ohne Hinzutritt einer Tangentialspannung die Elasticitätsgrenze erreicht ist.*)

Unter diesen Umständen ist man genöthigt, die Widerstandsfähigkeit der Niete auf Grund specieller Versuche zu beurtheilen, bei welchen die Belastung bis zum Bruche gesteigert wurde. Solche Versuche, welche u. A. besonders von W. Fairbairn angestellt worden sind, haben ergeben, dass, damit der Bruch einer einfachen Nietung mit gleicher Wahrscheinlichkeit durch die Abscheerung der Niete wie durch das Reissen des Blechs herbeigeführt werde, die Niete zusammen ungefähr denselben Querschnitt haben müssen wie das zwischen den Nietlöchern übrig gebliebene Blech. Bei der Berechnung einer Vernietung pflegt man hiernach so zu verfahren, als ob die ganze auf relative Verschiebung der vernieteten Bleche hinwirkende Kraft eine in den Nietquerschnitten gleichförmig vertheilte Tangentialspannung τ hervorriefe, welche infolge entsprechender Wahl der Verhältnisse = der im Bleche selbst hervorgerufenen grössten Normalspannung σ sein soll. Dazu kommt als zweites Erforderniss einer rationellen Vernietung, dass durch dieselbe das Blech so wenig geschwächt werde, als mit Rücksicht auf die jeweiligen Umstände, insbesondere z. B. die Forderung eines sehr dichten Abschlusses der Fuge möglich ist.

184. — Ist bei der einfachen Vernietung (Ueberblattung der Bleche mit einer Nietreihe zwischen den Blechrändern)

b die Blechstärke,

d der Durchmesser der Nietbolzen,

e die Entfernung zweier aufeinander folgender Nietlöcher von Mitte zu Mitte,

so entspricht der Forderung $\tau = \sigma$ (Nr. 183) die Gleichung:

$$\frac{\pi d^2}{4} = (e - d) b,$$

*) Bei Versuchen, welche in England bei Gelegenheit des Baues der Britannia-Brücke, und bei anderen, welche später in Frankreich angestellt wurden, hatte man zwei Blechstreifen mittels zweier die Stossfuge von beiden Seiten überdeckender Stossplatten durch zwei Niete so zusammengenietet, dass die Nietbolzen in den gestossenen Blechplatten Spielraum hatten, und fand dann die Zugkraft, welche das Gleiten der letzteren zwischen den sie einklemmenden Stossplatten bewirkte, = 1000 bis 1400 Kil. pro Quadratcentimeter des Nietquerschnitts. Bei Versuchen, welche im Auftrage der französischen Regierung über die Anwendung des Gussstahlblechs zu Dampfkesseln angestellt wurden, ergab sich jene Zugkraft für rothwarm angetriebene Gussstahlniete im Mittel aus zwei Versuchen = 1310 Kil., und als zwei Blechstreifen, der eine mit ovalem Nietloche, direct mit übergreifenden Rändern durch ein Gussstahlniet verbunden wurden, im Mittel aus zwei weiteren Versuchen = 1730 Kil. pro Quadratcentimeter, welcher bedeutend grössere Werth ohne Zweifel der in diesem Falle etwas schiefen Zugrichtung und der dadurch bedingten einseitigen Pressung der Nietköpfe gegen die Bleche zuzuschreiben ist. In allen Fällen war hierbei die Reibung in zwei Reibungsflächen zu überwinden.

woraus folgt:

$$\frac{e}{b} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{b}\right)^2 + \frac{d}{b},$$

und die verhältnissmässige Verschwächung des Blechs ist:

$$\frac{e-d}{e} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi}\frac{b}{d}}.$$

Ausser durch Abscheerung der Nietbolzen oder durch Reissen des Blechs zwischen den Nietlöchern könnte die Vernietung auch dadurch zerstört werden, dass die zwischen dem Nietbolzen und dem Blechrande befindliche Masse hinausgeschoben wird, wenn die Entfernung $= a$ dieses Randes vom Mittelpunkte des Nietloches zu klein ist. In der That ist freilich der Vorgang hierbei nicht so einfach, sondern es ist wahrscheinlicher, dass event. nur eine einzige Rissfläche $= \left(a - \frac{d}{2}\right) b$ an der schwächsten Stelle sich bilden und durch Biegung des Blechs eine Oeffnung für den Durchgang des Nietbolzens darbieten würde. Man geht aber sicher, wenn etwa

$$ab = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ also } a = e - d$$

gesetzt wird.

Das Verhältniss $\frac{d}{b}$ ist im Allgemeinen $= 1{,}5$ bis $2{,}5$; je kleiner es genommen wird, desto kleiner wird $\frac{e}{b}$, desto dichter also die Fuge; je grösser es genommen wird, desto grösser wird $\frac{e-d}{e}$, desto geringer also die Verschwächung des Blechs.*) Man findet

für $\frac{d}{b} =$	1,5	2	2,5
$\frac{e}{b} =$	3,27	5,14	7,41
$\frac{a}{b} = \frac{e-d}{b} =$	1,77	3,14	4,91
$\frac{e-d}{e} =$	0,54	0,61.	0,66.

*) Mit dieser geringeren Schwächung des Blechs in Betreff des Widerstandes gegen eine Zugkraft ist freilich eine andere Gefahr verbunden, bestehend in einer übermässigen Grösse des Normaldrucks zwischen dem Nietbolzen und seiner halbcylindrischen Stützfläche im Nietloche. Wird dieser Normaldruck constant $= p$ pro Flächeneinheit dieser Stützfläche angenommen, so ist $p =$ dem resultirenden Drucke dividirt durch bd; sollte also p nicht grösser, als $\sigma = \tau$ sein, so müsste

$$bd \geqq \frac{\pi d^2}{4};\ \frac{d}{b} \leqq \frac{4}{\pi} = 1{,}27$$

gemacht werden, während bei dem Verhältnisse $\frac{d}{b} = 2{,}5$ schon p fast doppelt so gross, als σ oder τ wäre. Dieses Verhältniss $\frac{d}{b} = 2{,}5$ ist deshalb als eine keinesfalls zu überschreitende Grenze zu betrachten, weil sonst das Entstehen aufgeworfener Ränder an den Nietlöchern zu befürchten wäre, wenn auch die übrigen Theile der Vernietung noch nicht bis zum Maximum ihrer zulässigen Spannung angestrengt sind.

Dieselben Regeln gelten auch für jede der beiden Nietreihen einer einfachen Bandvernietung (stumpf an den Rändern zusammengestossene Bleche mit einem die Stossfuge überdeckenden Blechbande), vorausgesetzt, dass die Bleche der Einwirkung einer äusseren Kraft unterworfen sind, welche sie auseinander zu ziehen strebt; wenn aber umgekehrt die Bleche in der Stossfuge gegeneinander gepresst werden, ein Fall, für welchen die Bandvernietung besonders zweckmässig ist, so entzieht sich die geringe und fast nur durch Zufälligkeiten der Ausführung bedingte Anstrengung der Niete ganz der Berechnung, und kann in diesem Falle der kleinste obiger Werthe von $\frac{d}{b}$ mit dem grössten Werthe von $\frac{e}{b}$ combinirt, also etwa $\frac{d}{b} = 1,5$ bei $\frac{e}{b} = 7,5$ gesetzt werden.

185. — Bei der doppelten Vernietung (Ueberblattung der Bleche mit 2 gegen einander versetzten Nietreihen zwischen den Blechrändern) mögen d_1, e_1 und a_1 dieselben Bedeutungen haben wie d, e und a bei der einfachen Vernietung. Dann ist zu setzen:

$$2\,\frac{\pi d_1^2}{4} = (e_1 - d_1)\,b, \text{ also } \frac{e_1}{b} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{d_1}{b}\right)^2 + \frac{d_1}{b}$$

$$a_1 b = \frac{\pi d_1^2}{4}, \text{ also } a_1 = \frac{e_1 - d_1}{2}.$$

Man findet für			
$\frac{d_1}{b}$ =	1,5	2	2,5
$\frac{e_1}{b}$ =	5,03	8,28	12,32
$\frac{a_1}{b}$ =	1,77	3,14	4,91
$\frac{e_1-d_1}{e_1}$ =	0,70	0,76	0,80.

Noch etwas grösser stellt sich in Beziehung auf die geringere Schwächung des Blechs der Vortheil der doppelten Vernietung heraus, wenn man dabei ebenso viel, aber verhältnissmässig dickere Niete anwendet, als bei der einfachen Vernietung; denn für $e_1 = 2e$

und $\frac{d}{b}$ =	1,5	2	2,5
findet man $\frac{d_1}{b}$ =	1,75	2,26	2,77
$\frac{e_1-d_1}{e_1}$ =	0,73	0,78	0,81.

Dieselben Regeln gelten auch für eine doppelte Bandvernietung (stumpf an den Rändern zusammengestossene Bleche mit zweien die Stossfuge von beiden Seiten überdeckenden Blechbändern), vorausgesetzt, dass die Bleche einer äusseren Kraft unterworfen sind, welche sie auseinander zu ziehen strebt; im entgegengesetzten Falle kann $\frac{d_1}{b} = 1,5$ bei $\frac{e_1}{b} = 12$ gesetzt werden. Die Schubkraft vertheilt sich hier unter 2 Querschnitte desselben Nietbolzens.

FÜNFTES CAPITEL.

Drehungs-Elasticität und Festigkeit.

---

186. — Nach der Definition in Nr. 18 wird hierunter derjenige Fall verstanden, in welchem die äusseren Kräfte sich für jeden Querschnitt des stabförmigen Körpers durch ein resultirendes Kräftepaar ersetzen lassen, dessen Ebene dem Querschnitte parallel ist und dessen Moment hier mit M bezeichnet werden soll. Die Mittellinie des Körpers wird im Allgemeinen als eine gerade Linie (geometrische Axe) vorausgesetzt, gegen welche die Richtungslinien der äusseren Kräfte rechtwinkelig und windschief gerichtet sind, so dass sie in Ebenen liegen, welche die Axe rechtwinkelig schneiden. Denkt man die Kräfte in diesen Ebenen an deren Schnittpunkte mit der Axe versetzt, so erhält man ausser einem Systeme von Kräftepaaren im Allgemeinen noch ein System von Kräften, welche den Körper auf Biegungs-Elasticität und Festigkeit in Anspruch nehmen, von welchen aber ebenso wie von dem eigenen Gewichte des Körpers in diesem Capitel abstrahirt wird.

Für jeden Querschnitt eines zwischen den Ebenen zweier auf einander folgender Kräftepaare liegenden Stücks AB des Körpers ist das resultirende Moment M gleich gross = der algebraischen Summe der Momente der von dort bis zum Ende des Körpers angreifenden Kräftepaare. Ein constanter Querschnitt eines solchen Stücks AB, wie er im Folgenden vorausgesetzt wird, entspricht also hier zugleich der Forderung eines Körpers von gleichem Widerstande.

Sind A und A_1 zwei correspondirende materielle Punkte der unendlich nahe benachbarten Querschnitte F und F_1 (AA_1 parallel der Axe vor der Einwirkung von M), so lässt sich die durch M bewirkte relative Verdrehung von F und F_1 betrachten als das Resultat eines gewissen Systems von Verschiebungen γ, welche der Richtung und Grösse nach mit der Lage der Punkte A und A_1 sich ändern und für gewisse Punkte O und O_1 = Null sind. Der Drehungsmittelpunkt O hat in allen Querschnitten des Stabstücks AB dieselbe Lage, und der Ort dieser Punkte O ist also eine mit der

geometrischen Axe parallele oder zusammenfallende Gerade: Drehungsaxe.

Den Verschiebungen γ in den verschiedenen Punkten A eines Querschnitts entsprechen Tangentialspannungen τ von derselben Richtung und welche der Grösse nach zu γ ein constantes Verhältniss haben, sofern, wie vorausgesetzt wird, der Körper entweder isotrop ist oder homogen mit einer ausgezeichneten Elasticitätsaxe im Sinne der geometrischen und der Drehungsaxe. Den Maximalwerth von τ zu finden, welcher in irgend einem Punkte des Querschnitts bei gegebener Form desselben und bei gegebenem Drehungsmomente M stattfindet, ist die Hauptaufgabe dieses Capitels; indem derselbe = einem gegebenen Werthe t sein soll, ist die erforderliche Grösse des Querschnitts oder die zulässige Grösse des Moments M bestimmt. Ausserdem ist der specifische Drehungswinkel ϑ zu berechnen, d. i. der Winkel, um welchen zwei materiell gedachte Querschnitte F und F_1 in der Entfernung $O O_1 = 1$ gegeneinander verdreht werden.

A. Gewöhnliche Theorie.

187. — Man geht gewöhnlich von der Annahme aus, dass bei der Verdrehung die materiellen Querschnitte vollkommen unverändert, insbesondere auch vollkommen eben bleiben. Die Verschiebung γ und Tangentialspannung τ im Punkte A eines Querschnitts sind dann senkrecht gegen OA gerichtet und dem Abstande $OA = r$ vom Drehungsmittelpunkte O proportional, so dass, wenn y und z die Coordinaten des Punktes A sind bezogen auf die im Querschnitte angenommenen rechtwinkeligen Axen OY und OZ, und wenn ferner τ_1 der Werth von τ für $r = 1$ ist, für die Componenten von τ nach den Richtungen OY und OZ*) die Gleichungen gelten:

$$\tau_z = -\tau_1 . z; \quad \tau_y = \tau_1 . y$$

vorausgesetzt, dass τ gerichtet ist im Sinne einer Drehung von OY gegen OZ. Hiermit folgt aus den beiden ersten der 3 Gleichgewichtsbedingungen:

$$\int \tau_z . dF = 0; \quad \int \tau_y . dF = 0; \quad \int \tau dF . r = M,$$

worin $dF = dy\, dz$ ein unendlich kleines Flächenelement 2ter Ordnung des Querschnitts bedeutet:

$$\int z dF = 0 \text{ und } \int y dF = 0;$$

d. h. der Drehungsmittelpunkt O fällt mit dem Schwerpunkte von F, die Drehungsaxe OX mit der geometrischen Axe zusammen.

*) Nach der Bezeichnungsweise in Nr. 10 würden diese Spannungscomponenten mit τ_{xy} und τ_{xz} zu bezeichnen sein, wofür aber ebenso wie in der Folge die kürzeren Bezeichnungen τ_z und τ_y gewählt sind: cf. Nr. 211.

Aus der dritten Gleichung folgt, wenn mit

$$A = \int r^2 dF$$

das Trägheitsmoment von F in Beziehung auf OX bezeichnet wird, und wenn e der Maximalwerth von r ist:

$$\tau = \frac{Mr}{A}; \; max. \tau = \frac{Me}{A}.$$

Sind $B = \int z^2 dF$ und $C = \int y^2 dF$ die Trägheitsmomente von F in Beziehung auf OY und OZ, so ist:

$$A = B + C.$$

Ist der Querschnitt ein regulăres Polygon, s die Seite, e der Radius des umbeschriebenen Kreises, so ist (cf. Nr. 47):

$$B = C; \; A = \frac{F}{6}\left(3e^2 - \frac{s^2}{2}\right),$$

insbesondere für einen Kreis vom Radius e oder Durchmesser d:

$$A = \frac{Fe^2}{2} = \frac{\pi e^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

188. — Der specifische Drehungswinkel ϑ ist = der Verschiebung γ_1 im Abstande = 1 von O, also

$$\vartheta = \frac{\tau_1}{G} = \frac{M}{AG};$$

in Graden ausgedrückt:

$$\vartheta^0 = \frac{180}{\pi} \vartheta.$$

Für Metalle, überhaupt isotrope Körper, ist hierbei nach Nr. 169

$$G = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E = \frac{3}{8} E \text{ bis } \frac{2}{5} E$$

zu setzen; für Hölzer kann die Constante G nur aus Versuchen über die Verdrehung selbst entnommen werden, und ist danach im Durchschnitte zu setzen:

$G = 7000$ für Kiefernholz,
$G = 8000$ „ Eichenholz,
$G = 12000$ „ Buchenholz.

189. — Eine Transmissionswelle mit kreisförmigem Querschnitte habe ein Kraftmoment = M Kilogramm-Centimeter oder N Pferdestärken bei n Umgängen pro Minute zu übertragen; soll dabei $max. \tau = t$ Kilogr. pro □ Centimeter sein, so ist nach Nr. 187 der erforderliche Durchmesser:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi t}} \cdot \sqrt[3]{M} = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, 71620}{\pi t}} \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \text{ Centim.}$$

Wird also nach Redtenbacher im Durchschnitt gesetzt für schmiedeeiserne resp. gusseiserne Wellen:

$$d = 12\sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \text{„} \quad d = 16\sqrt[3]{\frac{N}{n}},$$

so ist entsprechend . $t = 211$ resp. $t = 89$,

also auch . . . . $d = 0{,}289\sqrt[3]{M}$ „ $d = 0{,}385\sqrt[3]{M}$. *)

Dabei ist nach Nr. 188 der Verdrehungswinkel in Graden pro 1 Centimeter Wellenlänge:

$$\vartheta^0 = \frac{360}{\pi}\frac{t}{G}\frac{1}{d};$$

insbesondere für Schmiedeeisen und Gusseisen

mit $t = 211$ „ 89

und $G = 800000$ „ 400000

$$\vartheta^0 = \frac{1}{33d} \quad „ \quad \frac{1}{39d}.$$

190. — Bei sehr langen Wellenleitungen kann es unter Umständen der Fall sein, dass zugleich die Rücksicht auf einen nicht zu grossen Verdrehungswinkel bei der Wahl des Durchmessers d in Betracht kommt; ist aber

$$\vartheta^0 = \frac{180}{\pi}\vartheta = \frac{180}{\pi}\frac{M}{\frac{\pi d^4}{32}\cdot G}$$

gegeben, so folgt:

$$d = \sqrt[4]{\frac{180.32}{\pi^2 G\vartheta^0}}\cdot\sqrt[4]{M} = \sqrt[4]{\frac{180.32.71620}{\pi^2 G\vartheta^0}}\cdot\sqrt[4]{\frac{N}{n}}.$$

Setzt man nach Redtenbacher für dergleichen lange Transmissionswellen aus Schmiedeeisen:

$$d = 12\sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

so ist entsprechend: $d = 0{,}734\sqrt[4]{M}$

und mit $G = 800000$: $\vartheta^0 = \frac{1}{397}$

d. h. nahe 1^0 Verdrehung auf 4 Meter Wellenlänge. Diese Constructionsregel giebt natürlich nur dann grössere Sicherheit, als die frühere sub Nr. 189, wenn $N < n$ ist.

191. — Die den obigen Formeln zu Grunde liegende Annahme, dass die materiellen Querschnitte des Stabes bei seiner Verdrehung vollkommen eben bleiben und dass mithin die Tangentialspannung τ in jedem Punkte A des Querschnitts senkrecht zu dessen Verbindungslinie mit dem Drehungsmittelpunkte oder Schwerpunkte O gerichtet sei, ist übrigens nur in dem einzigen Falle gerechtfertigt, dass der Querschnitt ein Kreis ist. Denn wenn insbesondere A ein Punkt im Umfange des Querschnitts, AT Tangente, AN Normale desselben und AS senkrecht zur Querschnittsebene TAN die betreffende Seite der cylindrischen Staboberfläche ist, so kann

*) In Betreff der für einen gegebenen Fall passenden Werthe von t ist der Beurtheilung der jeweiligen Umstände ein ziemlich weiter Spielraum zu lassen; bei Winden z. B. und anderen durch Kurbel und Menschenkraft bewegten Maschinen, sowie in manchen anderen Fällen, in denen heftige Stösse nicht zu befürchten sind, darf t wesentlich grösser genommen werden, als 211 resp. 89.

bei dem Fehlen entsprechender äusserer Kräfte in der Berührungsebene TAS keine Tangentialspannung, insbesondere auch keine solche nach der Richtung AS stattfinden, es muss also (cf. Nr. 10) $\tau_{ns} = 0$, mithin auch $\tau_{sn} = 0$, d. h. es muss die Tangentialspannung im Querschnitte für jeden Punkt seines Umfangs nach der Tangente desselben gerichtet sein.

Dieser Bedingung entspricht die obige Annahme in der That nur dann, wenn der Querschnitt ein Kreis ist; in allen anderen Fällen muss die Richtung von τ sich von der zu der Verbindungslinie OA senkrechten Richtung um so mehr entfernen und der Richtung der Tangente am Querschnittsumfange um so mehr nähern, je mehr der Punkt A in einem von O aus gezogenen Strahle sich von O entfernt und dem Schnittpunkte dieses Strahls mit dem Umfange nähert, ein Verhalten, womit dann offenbar auch eine unverändert ebene Beschaffenheit des materiellen Querschnitts nicht mehr verträglich ist.

B. Corrigirte Theorie.

192. — Es wird hierbei vorausgesetzt, dass der Querschnitt zwei zu einander senkrechte Symmetrieaxen habe, welche zur Bestimmung der Lage eines Punktes A im Querschnitte F als Coordinatenaxen OY und OZ angenommen werden; O ist der Schwerpunkt von F, OX die geometrische Axe des Stabes.

$$B = \int z^2 \, dF \text{ und } C = \int y^2 \, dF$$

seien die Trägheitsmomente von F in Beziehung auf OY und OZ.

Als selbstverständlich darf a priori angenommen werden, dass die Drehungsaxe mit der geometrischen Axe OX zusammenfällt und dass die materiell gedachten Symmetrieaxen OY und OZ irgend eines Querschnitts auch bei der Verdrehung stets zu einander und zu OX senkrechte gerade Linien bleiben.

Die Verdrehung eines Querschnitts gegen einen anderen wird dann gemessen durch den Winkel, welchen die Symmetrieaxen beider Querschnitte miteinander bilden.

I. Die Maximalspannung.

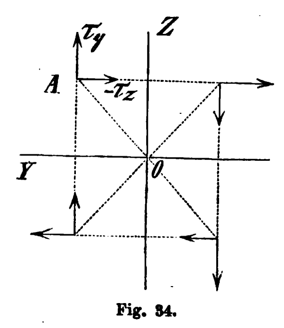


Fig. 34.

193. — Im Punkte A mit den Coordinaten y, z sei

$\tau_{xy} = \tau_z$ die Tangentialspannung nach der Richtung OY,

$\tau_{xz} = \tau_y$ die Tangentialspannung nach der Richtung OZ;

τ_z und τ_y sind Functionen von y und z, und zwar ist der vorausgesetzten Symmetrie wegen (**Fig. 34**) der Ausdruck von τ_z nothwendig so beschaffen, dass er ungeändert bleibt, wenn y entgegengesetzt ge-

nommen wird, dass er aber selbst entgegengesetzt wird, wenn z entgegengesetzt genommen wird.

Nimmt man also an, es lasse sich τ_z in eine nach ganzen Potenzen von y und z fortschreitende Reihe entwickeln, so kann dieselbe nur solche Glieder haben, welche gerade Potenzen von y und ungerade Potenzen von z enthalten, und wenn man demgemäss

$$\tau_z = mz + m_1 y^2 z + m_2 z^3$$

setzt, so sind dabei nur die Glieder von der 5ten Ordnung incl. an weggelassen. In gleicher Weise ist

$$\tau_y = ny + n_1 y z^2 + n_2 y^3$$

zu setzen. Zur Bestimmung der Coefficienten dienen:

1) die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Spannungen im ganzen Querschnitte und dem äusseren Kraftmomente M;
2) die Bedingungen des Gleichgewichts der auf die Oberfläche eines unendlich kleinen Körperelements wirkenden inneren Kräfte;
3) die Bedingung, dass die Spannung τ im Umfange des Querschnitts tangential an denselben gerichtet sein muss (Nr. 191).*)

194. — Das Gleichgewicht zwischen den Spannungen im Querschnitte und dem äusseren Kraftmomente M wird ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\int \tau_z . dF = 0; \int \tau_y . dF = 0; \int (y\tau_y - z\tau_z)\, dF = M.$$

Werden darin für τ_z und τ_y die Ausdrücke aus Nr. 193 substituirt, so finden sich die beiden ersten Gleichungen mit Rücksicht auf die Symmetrie des Querschnitts unabhängig von den 6 Coefficienten m und n erfüllt; die dritte Gleichung aber liefert als erste Bedingung:

$$nC - mB + (n_1 - m_1)\int y^2 z^2 dF + n_2 \int y^4 dF - m_2 \int z^4 dF = M \,..\, (1).$$

195. — Wenn man vom Punkte A als Eckpunkt aus ein unendlich kleines Parallelepipedum construirt denkt, dessen Kanten $= dx, dy, dz$ resp. den Axen OX, OY, OZ parallel sind, so wirken auf die zur x-Axe senkrechten Seitenflächen die Kräfte:

$$-\tau_z \text{ und } \tau_z + \frac{d\tau_z}{dx}dx \text{ nach der Richtung } OY$$

$$-\tau_y \text{ und } \tau_y + \frac{d\tau_y}{dx}dx \quad " \quad " \quad " \quad OZ,$$

auf die zur y-Axe senkrechten Seitenflächen die Kräfte:

$$-\tau_z \text{ und } \tau_z + \frac{d\tau_z}{dy}dy \text{ nach der Richtung } OX$$

und auf die zur z-Axe senkrechten Seitenflächen die Kräfte:

$$-\tau_y \text{ und } \tau_y + \frac{d\tau_y}{dz}dz \text{ nach der Richtung } OX,$$

*) Wenn die 6 Coefficienten m und n sich diesen 3 Bedingungen entsprechend nicht bestimmen liessen, so müssten noch weitere Glieder mit höheren Potenzen von y und z hinzugenommen werden.

alle Kräfte auf die Flächeneinheit bezogen, also beziehungsweise noch mit $dydz$, $dzdx$, $dxdy$ zu multipliciren. Dem Gleichgewichte dieser inneren Kräfte entsprechen die Gleichungen:*)

$$\frac{d\tau_z}{dy} + \frac{d\tau_y}{dz} = 0; \quad \frac{d\tau_z}{dx} = 0; \quad \frac{d\tau_y}{dx} = 0;$$

die beiden letzten sind dadurch erfüllt, dass die Coefficienten der für τ_z und τ_y angenommenen Ausdrücke (Nr. 193) als constant (unabhängig von x im Bereiche eines Stabstücks, für welches M constant ist) vorausgesetzt werden, die erste Gleichung aber führt zu der zweiten Bedingung:

$$m_1 + n_1 = 0 \quad . \; . \; . \; (2).$$

a. Allgemeine Näherungsformel.

196. — Die noch übrige Bedingung, dass die Tangentialspannung τ im Umfange des Querschnitts tangential an denselben gerichtet sein muss, führt bei verschiedenen Querschnittsformen zu verschiedenen Bestimmungsgleichungen der Coefficienten m und n; wenn man aber für das Rechteck und für die Raute als zwei extreme Fälle die betreffende Rechnung durchführt, so wird man das Resultat derselben, insoweit es für beide Fälle übereinstimmt, als näherungsweise gültig für jede convexe Querschnittsform betrachten dürfen, welche zwei zu einander senkrechte Symmetrieaxen hat.

Wenn insbesondere für das Rechteck
die der y-Axe parallelen Seiten $= 2b$,
„ „ z-Axe „ „ $= 2c$
gesetzt werden, so muss
$\tau_z = 0$ sein für $y = \pm b$ und jeden Werth von z,
$\tau_y = 0$ „ „ $z = \pm c$ „ „ „ „ y.
Daraus folgt:

$$m_1 = -\frac{m}{b^2}; \quad m_2 = 0; \quad n_1 = -\frac{n}{c^2}; \quad n_2 = 0,$$

und es ist also jetzt:

$$\tau_z = mz\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right); \quad \tau_y = ny\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

während die Gleichungen (1) und (2) zur Bestimmung von m und n übergehen in:

$$nC - mB - \left(\frac{n}{c^2} - \frac{m}{b^2}\right)\int y^2 z^2 dF = M$$

$$\frac{m}{b^2} + \frac{n}{c^2} = 0;$$

---

*) Durch diese 3 Gleichungen werden die algebraischen Summen der Kräfte nach den Richtungen OX, OY, OZ = Null gesetzt; die 3 Momentengleichungen werden identisch, weil durch die Bezeichnungen

τ_z für τ_{zy} und τ_{yz}, τ_y für τ_{zx} und τ_{xz}

die aus eben diesen Momentengleichungen sonst hervorgehenden Relationen

$\tau_{zy} = \tau_{yz}$ und $\tau_{zx} = \tau_{xz}$

nach Nr. 10 als bekannt vorausgesetzt wurden.

die letzte Gleichung kann wegen

$$B = \frac{4}{3}\, b c^3;\ C = \frac{4}{3}\, b^3 c$$

auch geschrieben werden:

$$n C + m B = 0.$$

197. — Für die **Raute** sei
die in der y-Axe liegende Diagonale $= 2b$,
" " " z-Axe " " $= 2c$.

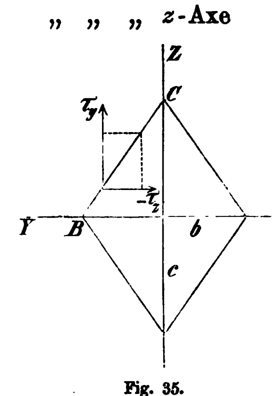


Fig. 35.

Die Bedingung, dass in allen Punkten der Seite BC (Fig. 35) die Richtung der resultirenden Tangentialspannung mit ihr zusammenfallen muss (worin mit Rücksicht auf die der Symmetrie angepasste Form der Ausdrücke von τ_z und τ_y zugleich liegt, dass dieses auch in allen Punkten der anderen drei Seiten der Fall ist), wird hier durch die Gleichung ausgedrückt:

$$-\tau_z : \tau_y = b : c \text{ oder } c\tau_z + b\tau_y = 0,$$

welche durch alle Werthe von y und z erfüllt werden muss, die der geraden Linie BC entsprechen, also durch jeden Werth von y, falls

$$z = -\frac{c}{b}\, y + c = c\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

gesetzt wird. Durch diese Substitution wird die linke Seite der obigen Gleichung eine ganze Function 3ten Grades von y, und indem die Coefficienten von y^0, y, y^2 und y^3 einzeln $= 0$ gesetzt werden, erhält man 4 Gleichungen, woraus folgt:

$$m_1 = -\frac{m}{b^2} - 2\,\frac{n}{c^2};\ m_2 = -\frac{m}{c^2}$$

$$n_1 = -\frac{n}{c^2} - 2\,\frac{m}{b^2};\ n_2 = -\frac{n}{b^2}.$$

Damit wird jetzt:

$$\tau_z = mz\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) - 2nz\,\frac{y^2}{c^2}$$

$$\tau_y = ny\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) - 2my\,\frac{z^2}{b^2},$$

während die Gleichungen (1) und (2) zur Bestimmung von m und n übergehen in:

$$nC - mB + \left(\frac{n}{c^2} - \frac{m}{b^2}\right)\int y^2 z^2 dF - \frac{n}{b^2}\int y^4 dF + \frac{m}{c^2}\int z^4 dF = M$$

$$\frac{m}{b^2} + \frac{n}{c^2} = 0;$$

die letzte Gleichung kann wegen

$$B = \frac{bc^3}{3};\ C = \frac{b^3 c}{3}$$

auch geschrieben werden: $nC + mB = 0.$

198. — Die in den beiden vorigen Nummern für das Rechteck und die Raute gefundenen Resultate lassen sich zur Uebereinstimmung bringen, wenn die vorübergehend berücksichtigten Glieder der 3ten Ordnung in den Ausdrücken von τ_z und τ_y nachträglich wieder weggelassen werden, wenn also gesetzt wird:

$$\tau_z = mz\,;\ \tau_y = ny;$$

Gl. (1) geht dadurch über in:

$$nC - mB = M,$$

wodurch in Verbindung mit der für Rechteck und Raute übereinstimmend gefundenen Gleichung*)

$$nC + mB = 0$$

die Coefficienten m und n, mithin

$$\tau_z = -\frac{M}{2B}\,z\,;\ \tau_y = \frac{M}{2C}\,y$$

bestimmt sind. Die resultirende Tangentialspannung τ im Punkte (y,z) ist sonach:

$$\tau = \sqrt{\tau_z^2 + \tau_y^2} = \frac{M}{2}\sqrt{\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{C^2}}$$

$$max.\ \tau = t = \frac{M}{2}\,.\ max.\sqrt{\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{C^2}}\,.$$

$$\text{Mit } B = C \text{ wird } \tau = \frac{M}{2B}\sqrt{z^2 + y^2} = \frac{Mr}{A}$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 187, und es hat also der hier gefundene allgemeine Ausdruck von τ dieselbe Bedeutung als Näherungsformel für ungleiche Hauptträgheitsmomente B und C des Querschnitts, wie jener frühere Ausdruck für $B = C$.

b. Besondere Querschnittsformen.

199. — Ein Ausdruck von τ, welcher für andere Fälle dieselbe Berechtigung haben soll, wie die Formel $\tau = \frac{Mr}{A}$ für den Kreis, muss für jede Querschnittsform besonders abgeleitet werden.

Für das Rechteck ist nur die in Nr. 196 begonnene Rechnung durchzuführen. Wegen

$$\int y^2 z^2 dF = \int_{-b}^{b} y^2 dy \int_{-c}^{c} z^2 dz = \frac{4}{9}\,b^3 c^3 = \frac{Bb^2}{3} = \frac{Cc^2}{3}$$

erhält man m und n aus den Gleichungen:

$$nC - mB = \frac{3}{2}\,M$$

$$nC + mB = 0$$

*) Diese aus der Gl. (2) hervorgegangene Gleichung wäre nicht gefunden worden, wenn man von vornherein die Glieder von der 3ten Ordnung in den Ausdrücken von τ_z und τ_y weggelassen hätte.

und damit:

$$\tau_z = -\frac{3}{4}\frac{M}{B}z\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) = -\frac{9}{16}\frac{M}{bc^3}z\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\tau_y = \frac{3}{4}\frac{M}{C}y\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{9}{16}\frac{M}{b^3c}y\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$\tau = \frac{9}{16}\frac{M}{bc}\sqrt{\frac{z^2}{c^4}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{y^2}{b^4}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^2}.$$

Ist $b \leqq c$, so ist τ am grössten für $y = \pm b$ und $z = 0$, d. h. in den Mittelpunkten der längeren Seiten, und zwar

$$max.\ \tau = t = \frac{9}{16}\frac{M}{b^2c} \text{ *)}.$$

200. — Bei der Ellipse wird, wenn y und z die Coordinaten des Umfangs sind, die Umfangs- oder Oberflächenbedingung 3) sub Nr. 193 ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{\tau_y}{\tau_z} = \frac{dz}{dy},$$

welche mit Rücksicht auf die Ausdrücke von τ_y und τ_z und auf die Gleichung:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

der Ellipse (b und c Halbaxen) übergeht in:

$$\frac{n + n_1z^2 + n_2y^2}{m + m_1y^2 + m_2z^2} = -\frac{c^2}{b^2}.$$

Sie wird erfüllt, wenn

$$m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = 0$$

und $nb^2 + mc^2 = 0$ oder wegen

$$B = \frac{\pi bc^3}{4};\quad C = \frac{\pi b^3c}{4}$$

$$nC + mB = 0$$

gesetzt wird. Weil nun hierdurch zugleich die Bedingung (2) erfüllt ist, während Gl. (1) in

$$nC - mB = M$$

übergeht, so erkennt man, dass die in Nr. 198 für irgend einen doppeltsymmetrischen Querschnitt gefundene Näherungsformel:

$$\tau = \frac{M}{2}\sqrt{\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{C^2}}$$

---

*) Sind t_1, t_2 und t_3 die Werthe von $t = max.\ \tau$ nach den Formeln sub Nr. 187, 198 und 199, so ist immer $t_1 < t_2 < t_3$,

$$\text{nämlich } \frac{t_2}{t_1} = \frac{b^2+c^2}{2bc} = 1 \text{ bis } \infty$$

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{3}{2}\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} = 1{,}06\ldots \text{ bis } 1{,}5$$

$$\text{wenn } \frac{b}{c} = 1 \text{ bis } 0.$$

Die Formel $t = \frac{9}{16}\frac{M}{b^2c}$ ist zugleich am richtigsten, am sichersten und am einfachsten.

bei dem elliptischen Querschnitte allen gestellten Anforderungen entspricht, mithin hier dieselbe Berechtigung hat wie die Formel $\tau = \frac{Mr}{A}$ für den Kreis.

Der Maximalwerth von τ findet in den Endpunkten der kleinen Axe statt und ist für $b \gtreqless c$:

$$max.\ \tau = t = \frac{2M}{\pi b^2 c} \text{*)}.$$

II. Der Drehungswinkel.

201. — Zur Ableitung einer corrigirten Formel für den specifischen Drehungswinkel ϑ ist die Bemerkung vorauszuschicken, dass die in Nr. 8 erklärten Verschiebungen, welche in irgend einem Punkte A eines Körpers bei dessen Belastung und entsprechender Deformation stattfinden, sich folgendermassen ausdrücken lassen durch die mit der Deformation verbundenen kleinen Aenderungen ξ, η, ζ der rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z jenes Punktes:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}.$$

Wenn in der That $AB = dy$ und $AC = dz$ zwei im ursprünglichen Zustande parallel der y-Axe und der z-Axe von A aus gezogene unendlich kleine materielle gerade Linien sind, so ist

$\frac{d\eta}{dz} dz$ die relative Verrückung des Punktes C gegen den Punkt A im Sinne der y-Axe und

$\frac{d\zeta}{dy} dy$ die relative Verrückung des Punktes B gegen den Punkt A im Sinne der z-Axe, also

$\frac{d\eta}{dz}$ die Drehung von AC um A im Sinne ZY,

$\frac{d\zeta}{dy}$ „ „ „ AB „ A „ „ YZ und somit

$\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}$ die Verkleinerung des ursprünglich rechten Winkels ABC, welche nach Nr. 8 auch $= \gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ ist.

---

*) Wird dieser Werth mit t_2 bezeichnet zum Unterschiede von $t_1 = \frac{Mr}{A}$, so ist ebenso wie beim Rechtecke:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{b^2 + c^2}{2bc} = 1 \text{ bis } \infty$$

$$\text{für } \frac{b}{c} = 1 \text{ bis } 0.$$

202. — Ist nun insbesondere A ein Punkt des Querschnitts YZ des der Verdrehung unterworfenen stabförmigen Körpers und A_1 der entsprechende Punkt (mit denselben ursprünglichen Coordinaten y, z) des im Sinne der x-Axe um dx von jenem entfernten Querschnitts $Y_1 Z_1$, sind ferner $AB = dy$ und $A_1 B_1 = dy$ ursprünglich parallel der y-Axe, so erfahren diese unendlich kleinen materiellen Geraden AB und $A_1 B_1$ durch die Verdrehung des Körpers im Allgemeinen eine sehr kleine Neigung gegen die yz-Ebene und eine unendlich kleine Verdrehung gegeneinander.

$\frac{d\zeta}{dx}\,dx$ ist die Verrückung des Punktes A_1 gegen den Punkt A im Sinne der z-Axe, also

$\frac{d^2\zeta}{dx\,dy}\,dx\,dy$ der Ueberschuss der Verrückung von B_1 gegen B über die Verrückung von A_1 gegen A im Sinne der z-Axe, und

$\frac{d^2\zeta}{dx\,dy}\,dx$ der Winkel, um welchen in der yz-Ebene die Projection von $A_1 B_1$ gegen diejenige von AB im Sinne YZ verdreht wurde.

Setzt man in diesem letzten Ausdrucke, welcher eine Function von y und z ist, $z =$ Null, so ist

$$\left(\frac{d^2\zeta}{dx\,dy}\right)_{z=0} .\, dx$$

die Verdrehung der Hauptaxe $O_1 Y_1$ gegen OY im Sinne YZ. Ebenso ist

$$-\left(\frac{d^2\eta}{dx\,dz}\right)_{y=0} .\, dx$$

die Verdrehung von $O_1 Z_1$ gegen OZ im gleichen Sinne YZ, und da diese beiden Drehungswinkel $= \vartheta dx$ sind, so hat man:

$$\vartheta = \left(\frac{d^2\zeta}{dx\,dy}\right)_{z=0} = -\left(\frac{d^2\eta}{dx\,dz}\right)_{y=0}.$$

203. Aus den Gleichungen:

$$\tau_z = \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_y = \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

folgt jetzt durch Einsetzung der allgemeinen Ausdrücke von τ_z und τ_y nach Nr. 193 sowie von γ_{xy} und γ_{xz} nach Nr. 201:

$$mz + m_1 y^2 z + m_2 z^3 = G\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)$$
$$ny + n_1 y z^2 + n_2 y^3 = G\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)$$

und wenn die erste Gleichung nach z, die zweite nach y abgeleitet, dann in der ersten $y = 0$, in der zweiten $z = 0$ gesetzt wird, mit Rücksicht auf Nr. 202:

$$m + 3m_2 z^2 = G\left[\left(\frac{d^2\xi}{dy\,dz}\right)_{y=0} - \vartheta\right]$$
$$n + 3n_2 y^2 = G\left[\left(\frac{d^2\xi}{dy\,dz}\right)_{z=0} + \vartheta\right].$$

Setzt man endlich in der ersten dieser Gleichungen noch $z = 0$, in der zweiten noch $y = 0$, so folgt durch Subtraction beider:

$$\vartheta = \frac{n - m}{2G}.$$

204. — Für die Ellipse und näherungsweise für irgend einen doppelt-symmetrischen Querschnitt ist nach Nr. 198 und 200:

$$n = \frac{M}{2C}; \; m = -\frac{M}{2B},$$

also

$$\vartheta = \frac{M}{4G}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) = \frac{M}{\frac{4BC}{B+C}G}.$$

Mit $B = C$ wird dieses $\vartheta = \frac{M}{2BG} = \frac{M}{AG}$ in Uebereinstimmung mit Nr. 188*).

Für die Ellipse insbesondere wird, wenn b und c die Halbaxen sind:

$$\vartheta = \frac{1}{\pi}\frac{M}{G}\frac{b^2 + c^2}{b^3c^3}.$$

Für das Rechteck ist nach Nr. 199 nur $\frac{3}{2}M$ statt M zu setzen, also:

$$\vartheta = \frac{\frac{3}{2}M}{\frac{4BC}{B+C}G} = \frac{9}{32}\frac{M}{G}\frac{b^2 + c^2}{b^3c^3},$$

unter b und c die halben Seiten verstanden.

205. — Die Gleichung der krummen Fläche, in welche der materielle Querschnitt durch die Verdrehung übergeht, wird erhalten, indem man die Verrückung ξ eines beliebigen Punktes des ursprünglich ebenen Querschnitts YZ im Sinne der x-Axe als Function seiner Coordinaten y, z ausdrückt. Wird angenommen, diese Function lasse sich in eine nach ganzen Potenzen von y und z fortschreitende Reihe entwickeln, so können, damit $\xi = 0$ werde für $y = 0$ oder $z = 0$ d. h. für alle Punkte der Symmetrieaxen (cf. Nr. 192), nur solche Glieder vorkommen, welche zugleich y und z enthalten, und wenn sonach bis zu den Gliedern von der 4ten Ordnung

$$\xi = ayz + by^2z + cyz^2 + dy^3z + ey^2z^2 + fyz^3$$

---

*) Ist $B \gtreqless C$ so ist, wenn

$$\frac{M}{AG} = \frac{M}{(B+C)G} = \vartheta_1 \text{ und } \frac{M}{\frac{4BC}{B+C}G} = \vartheta_2$$

gesetzt wird,

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{(B+C)^2}{4BC} = 1 \text{ bis } \infty$$

$$\text{für } \frac{C}{B} = 1 \text{ bis } 0.$$

gesetzt wird, so folgt aus den Gleichungen (Nr. 203):

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d^2\xi}{dy\,dz}\right)_{y=0} &= \frac{m+3m_2z^2}{G}+\vartheta\\ \left(\frac{d^2\xi}{dy\,dz}\right)_{z=0} &= \frac{n+3n_2y^2}{G}-\vartheta\end{aligned}\right\}\quad \vartheta=\frac{n-m}{2G}$$

$$a=\frac{n+m}{2G};\ b=c=0;\ d=\frac{n_2}{G};\ f=\frac{m^2}{G};$$

e bleibt unbestimmt, muss aber $=0$ gesetzt werden, weil die Symmetrie erfordert, dass der Ausdruck von ξ entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen von y und z enthält. Demnach ist

$$\xi=\frac{yz}{G}\left(\frac{n+m}{2}+n_2y^2+m_2z^2\right).$$

Für einen rechteckigen und einen elliptischen Querschnitt ist $m_2=n_2=0$ und

$$\frac{n+m}{2G}=\frac{n+m}{n-m}\vartheta=\frac{\frac{1}{C}-\frac{1}{B}}{\frac{1}{C}+\frac{1}{B}}\vartheta=\frac{B-C}{B+C}\vartheta,$$

folglich:

$$\xi=\frac{B-C}{B+C}\vartheta\,.\,yz.$$

Der gekrümmte Querschnitt ist also eine windschiefe Fläche, welche aus 4 symmetrischen Theilen besteht, die durch die Axen OY und OZ von einander getrennt werden und von denen zwei gegenüberliegende vor der Ebene YZ, die beiden anderen dahinter liegen. Diese Fläche ist um so stärker gekrümmt, je grösser ϑ ist und je mehr B und C verschieden sind; mit $B=C$ geht sie, wenigstens für Rechteck und Ellipse, sonst aber näherungsweise in der Nähe des Mittelpunktes O, in eine Ebene über.

206. — Die Prüfung der hier dargestellten Theorie der Drehungselasticität durch Vergleichung mit den Ergebnissen von Versuchen kann nur mit Hülfe des Ausdrucks für den Drehungswinkel geschehen, weil die Spannung im Inneren eines Körpers sich nicht beobachten lässt; auch Versuche über das zum Abwürgen eines Stabes erforderliche Kraftmoment in Verbindung mit der anderweitig bekannten Schubfestigkeit des betreffenden Materials können keinen Aufschluss geben, weil dabei Zustände eintreten, auf welche die ein vollkommen elastisches Verhalten voraussetzende Theorie selbst nicht näherungsweise mehr passt.

Durch Messung des Drehungswinkels prismatischer Stäbe aus isotropem Materiale, insbesondere aus verschiedenen Metallen, hat Wertheim gefunden, dass, wenn $G=\frac{3}{8}E$ (cf. Nr. 169) gesetzt wird, die Formel

$$\vartheta=\frac{M}{\frac{4BC}{B+C}G}$$

eine gute Uebereinstimmung gewährt für kreisförmige, kreisringförmige und elliptische Querschnitte; dagegen liefert jenen Versuchen zufolge die oben für den rechteckigen Querschnitt entwickelte Formel:

$$\vartheta = \frac{\frac{3}{2}M}{\frac{4BC}{B+C}G}$$

im Allgemeinen etwas zu grosse Werthe, um so mehr, je mehr das Rechteck einem Quadrate sich nähert, für welchen Grenzfall der Coefficient von M nur etwa $= 1,2$ zu setzen ist. Wird allgemein

$$\vartheta = \frac{\alpha M}{\frac{4BC}{B+C}G}$$

gesetzt, so ist also mit $G = \frac{3}{8} E$ (isotroper Körper)*) durchschnittlich:

$\alpha = 1$ für kreisförmige und elliptische,
$\alpha = 1,2$ für quadratische und
$\alpha = 1,2$ bis $1,5$ für mehr und mehr längliche rechteckige Querschnitte.

Uebrigens wurde dieser Correctionscoefficient α nicht nur von der Querschnittsform, sondern zugleich einigermassen von M und von der Länge l des Stabes abhängig gefunden: α nimmt etwas zu, wenn M zunimmt oder l abnimmt; auch wurde schon bei mässiger Grösse von M ein Theil von ϑ nach der Entlastung bleibend gefunden, welcher mit M rasch zunahm und unter sonst gleichen Umständen bei längeren Stäben verhältnissmässig grösser war, als bei kurzen.

Diese letzteren Thatsachen hängen zusammen mit der bei der obigen Theorie ausser Acht gelassenen Compression in transversaler Richtung, wovon die Verdrehung eines Stabes stets in gewissem, und zwar, wie es scheint, von der Länge abhängigem Grade begleitet wird; die entsprechende Volumenverminderung bestimmte Wertheim durch die Flüssigkeitsmenge, welche aus dem mit der betreffenden Flüssigkeit erfüllten Inneren eines hohlen Stabes bei dessen Verdrehung hinausgetrieben wurde (cf. Nr. 169), und fand sie bei isotropen Körpern proportional ϑ^2.

207. — Eine Spiralfeder von constantem Querschnitte, deren Mittellinie auf einer beliebigen Umdrehungsfläche liegen möge, sei am einen Ende befestigt, am anderen durch eine Kraft P angegriffen, deren Richtungslinie mit der Axe der Spirale, d. h. der Axe jener Umdrehungsfläche zusammenfällt. Es soll die Ausdehnung oder Zusammendrückung δ berechnet werden, welche die Spiralfeder in der Richtung ihrer Axe erfährt.

Diese Aufgabe, welche der Anwendung von dergl. Spiralfedern zu Federwagen und anderen Dynamometern, zu Eisenbahnwagenpuffern etc. zu Grunde

*) In Betreff der für einige Holzarten einzusetzenden Werthe von G siehe Nr. 1[illegible]

liegt, ist streng genommen ziemlich complicirt, lässt sich aber näherungsweise unter gewissen Voraussetzungen, die bei den genannten Anwendungen meistens zutreffen, auf die blosse Verdrehung der einzelnen Längenelemente der Feder um ihre als geradlinig zu betrachtenden Mittellinien (nämlich die Bogenelemente ds der ganzen spiralförmigen Mittellinie) zurückführen.

Die Axe der Spiralfeder werde vertical stehend gedacht, und von einem beliebigen Punkte O ihrer Mittellinie aus sei

OX nach der Tangente,
OY nach dem Krümmungshalbmesser gerichtet,
OZ senkrecht zu OX und OY.

Die Normalebene YZ enthält den Querschnitt der Feder, welcher in Beziehung auf OY und OZ gewöhnlich symmetrisch ist. In einer durch O gelegten Horizontalebene sei

OA nach dem Durchschnittspunkte A dieser Horizontalebene mit der Axe AB der Spiralfeder gezogen (B Angriffspunkt von P),
OH sei die Horizontalprojection von OX, Winkel $HOX = \lambda$,
ON senkrecht zu OA, Winkel $HON = \mu$, Winkel $XON = \nu$;

dann ist
$$\cos\nu = \cos\lambda \,.\, \cos\mu.$$

$\varrho = f(\varphi)$ sei die Polargleichung der Horizontalprojection der Spirale für den Durchgang der Axe AB durch die Projectionsebene als Pol, der Winkel φ gerechnet von demjenigen (gewöhnlich grössten) Fahrstrahle $\varrho = r$ aus, welcher nach dem festen Endpunkte der Spirale hin gezogen ist.

Nun ist δ bedingt durch die Deformationen der einzelnen Längenelemente $OO_1 = ds$; um letztere auf ihre elementaren Bestandtheile zurückzuführen, werde die Kraft P von ihrem Angriffspunkte B an den Punkt O versetzt und hier zerlegt in die Seitenkräfte:

$P_x = P\sin\lambda$ nach der Richtung OX und
$P_{yz} = P\cos\lambda$ in der Querschnittsebene YZ.

Das durch die Versetzung von P eingeführte Kräftepaar
$$M = P\varrho$$
mit der Axe ON werde zerlegt in die Seitenpaare:

$M_x = P\varrho\cos\nu$ mit der Axe OX und
$M_{yz} = P\varrho\sin\nu$, dessen Axe in der Ebene YZ liegt.

P_x bewirkt eine Aenderung der Länge von OO_1,
P_{yz} eine Verschiebung der Endquerschnitte dieses Längenelements,
M_x eine Verdrehung desselben um seine Axe OX,
M_{yz} eine Veränderung seiner Krümmung.

Streng genommen wirken alle diese Umstände zusammen, um die Ausdehnung oder Zusammendrückung δ der Spiralfeder hervorzubringen, wozu noch kommt, dass die Gleichung $\varrho = f(\varphi)$ mit dem Belastungszustande der Feder sich etwas ändert, besonders wenn der Angriffspunkt B der Kraft P frei zur Seite ausweichen kann, während, wenn er geradlinig in der Axe der Spirale geführt wird, dadurch Seitenkräfte in den Führungen hervorgerufen werden, welche die Grössen
$$P_x \qquad P_{yz} \qquad M_x \qquad M_{yz}$$
modificiren.

208. — In Betreff der seitlichen Ausweichung des Angriffspunktes B resp. des Seitendruckes der Führung heben sich die Wirkungen je zweier Federelemente,

welche den Winkeln φ und $\varphi + \pi$ entsprechen, grösstentheils gegenseitig auf, so dass die Gesammtwirkung mit um so geringerem Fehler vernachlässigt werden kann, je weniger der Maximalwerth von φ, d. h. der gesammte Windungswinkel der Spirale sich von einem ganzen Vielfachen von 2π unterscheidet oder auch je weniger der etwaige Unterschied wegen einer sehr grossen Zahl von überhaupt vorhandenen Windungen verhältnissmässig ins Gewicht fällt. Eine solche Spirale vorausgesetzt, werde ferner angenommen, dass λ und μ sehr kleine Winkel sind, so dass näherungsweise

$$P_x = 0;\ P_{yz} = P;\ M_x = P\varrho;\ M_{yz} = 0$$

gesetzt werden kann.

Die Wirkung des Momentes M_x besteht in einer Verdrehung des Federelementes um seine Axe OX, und zwar nach Nr. 206 um den Winkel:

$$\vartheta ds = \frac{\alpha P \varrho}{AG} ds,$$

wenn die Function $\frac{4BC}{B+C} = A$ gesetzt wird.

Die entsprechende Drehung um ON beträgt:

$$\vartheta ds \,.\, cos\nu = \vartheta \varrho d\varphi$$

und bewirkt eine Verschiebung des Punktes B nach der Richtung der Axe BA

$$= \vartheta \varrho^2 d\varphi = \frac{\alpha P}{AG} \varrho^3 d\varphi.$$

Die Kraft $P_{yz} = P$ bewirkt Verschiebungen der Querschnitte gegeneinander, die zwar auch eine gewisse Verrückung des Punktes B nach der Richtung der Axe zur Folge haben, indessen ist diese, verglichen mit der durch M_x bedingten Verrückung des Punktes B, nur eine kleine Grösse der zweiten Ordnung, wenn, wie hier noch angenommen werden soll, die Querschnittsdimensionen klein im Vergleich mit ϱ sind*.) Sonach ist näherungsweise zu setzen, wenn n die Zahl der Windungen bedeutet:

$$\delta = \frac{\alpha P}{AG} \int_0^{n.2\pi} \varrho^3 d\varphi.$$

*) Diejenige Verrückung des Punktes B nach der Richtung der Axe, welche durch die gegenseitige Verschiebung der beiden Endflächen $= F$ des Längenelements ds der Spiralfeder bedingt wird, ist:

$$ds' = \gamma_0 \,.\, \varrho d\varphi,$$

unter γ_0 die specifische Verschiebung im Schwerpunkte O verstanden (cf. Nr. 265), also ein Ausdruck von der Art:

$$ds' = \alpha_1 \frac{P}{GF} \varrho d\varphi,$$

in welchem α_1 ein der Einheit vergleichbarer, übrigens von der Querschnittsform abhängiger Zahlencoefficient ist. Wird nun hiermit die durch M_x bedingte Verrückung des Punktes B:

$$ds'' = \frac{\alpha P}{AG} \varrho^3 d\varphi = \alpha \frac{P}{GF} \frac{\varrho^2}{a^2} \varrho d\varphi$$

verglichen, wobei $A = Fa^2$ gesetzt wurde, also a eine den Querschnittsdimensionen vergleichbare Länge bedeutet, so folgt:

$$\frac{ds'}{ds''} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \frac{a^2}{\varrho^2}.$$

Für die cylindrische Spirale ist mit $\varrho = \text{Const.} = r$:

$$\vartheta_1 = 2\pi n \frac{\alpha P}{AG} r^3,$$

für eine conische Spirale mit

$$\varrho = r - \frac{\varphi}{2\pi n}(r - r_1)$$

$$\vartheta_2 = \frac{\pi n}{2} \frac{\alpha P}{AG} \frac{r^4 - r_1^4}{r - r_1} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{r_1}{r}\right)\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)\vartheta_1,$$

durchschnittlich etwa $\vartheta_2 = 0{,}3\,\vartheta_1$ entsprechend $r_1 = \frac{1}{6}\,r$.

Ist insbesondere der Querschnitt der Feder ein Kreis vom Durchmesser d oder ein Rechteck mit den Seilen b und c, so ist

$$\text{mit } \alpha = 1: \quad \vartheta_1 = 64 n \frac{P}{G} \frac{r^3}{d^4}$$

$$\text{„} \quad \alpha = 1{,}5: \quad \vartheta_1 = 9\pi n \frac{P}{G} \frac{r^3(b^2 + c^2)}{b^3 c^3}.$$

Die durch die Belastung hervorgerufene grösste Tangentialspannung t ist sowohl bei der cylindrischen wie bei der conischen Spiralfeder:

$$t = \frac{16}{\pi} \frac{Pr}{d^3} \quad \text{resp.} \quad t = \frac{9}{2} \frac{Pr}{b^2 c} \; (b < c).$$

Sind z. B. P, ϑ, t und der Querschnitt gegeben, so findet man r aus der Gleichung für t, dann n aus der Gleichung für ϑ.

SECHSTES CAPITEL.

Allgemeine Beziehungen zwischen den Spannungen Ausdehnungen und Verschiebungen im Inneren eines durch äussere Kräfte angegriffenen elastischen Körpers.

A. Die Spannungen.

209. — A sei ein beliebiger Punkt des Körpers mit den Coordinaten x, y, z, bezogen auf ein rechtwinkeliges Axensystem OX, OY, OZ v. fester Lage gegen den Körper, wozu mit Rücksicht auf die Veränderlichke der Form des Körpers unter der Einwirkung der äusseren Kräfte erforderlic und genügend ist, dass ein Punkt des Körpers, die durch diesen und dur einen zweiten Punkt gehende Gerade, endlich die durch diese Gerade un durch einen dritten Punkt gehende Ebene feste Lagen gegen die Coordinatenaxen haben; die genannten 3 Punkte können dabei unendlich nahe beisammen liegen.

F sei eine beliebige durch A gelegte Ebene, deren Normale AB di Winkel α, β, γ mit den Coordinatenaxen bildet,

p die Spannung im Punkte A der Ebene F, d. h. der auf die Flächeneinheit bezogene Zug oder Druck, welchen bei der Belastung des Körpers die an die Ebene F beiderseits angrenzenden Körpertheile bei A gegenseiti auf einander ausüben (cf. Nr. 9). Die Zweideutigkeit der Richtung von wird dadurch beseitigt, dass p betrachtet wird als derjenige Zug oder Druck welchen der nach der Richtung AB gelegene Körpertheil auf den jensei F liegenden ausübt.

Die so bestimmte Richtung von p bildet mit der Richtung AB eine Winkel φ, der jeden Werth von 0 bis π haben kann; λ, μ, ν seien d Winkel zwischen der Richtung von p und den Coordinatenaxen.

$\sigma = p \cos\varphi$ ist die Normalspannung im Punkte A der Ebene oder im Punkte A nach der Richtung AB; sie ist positiv oder negativ eine Spannung im engeren Sinne oder eine Pressung, einem gegenseitige Zuge oder Drucke entsprechend, jenachdem φ spitz oder stumpf ist.

$\tau = p \sin \varphi$ ist die Tangentialspannung im Punkte A der Ebene F; sie ist absolut wie p, kann aber in der Ebene F in Componenten nach gewissen Richtungen zerlegt werden, die dann positiv oder negativ sind, jenachdem diese Richtungen mit der Richtung von τ spitze oder stumpfe Winkel bilden.

Werden durch den Punkt A insbesondere 3 Ebenen

$$YAZ \quad ZAX \quad XAY$$

parallel den Coordinatenebenen gelegt, so seien

$$p_x \quad p_y \quad p_z.$$

die Spannungen im Punkte A jener Ebenen, der Richtung nach betrachtet als Kräfte, welche von den nach den Richtungen AX, AY, AZ gelegenen Körpertheilen auf die jenseits der bezeichneten Ebenen liegenden Körpertheile ausgeübt werden.

p_x lässt sich zerlegen in eine Normalspannung σ_x und in eine Tangentialspannung, welche wiederum nach den Richtungen AY und AZ in die Componenten τ_{xy} und τ_{xz} zerlegt werden möge. Wird ebenso mit p_y und p_z verfahren, so ergeben sich 9 Spannungscomponenten:

Ebene	YAZ;	p_x	mit den Componenten	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
„	ZAX;	p_y	„ „ „	σ_y	τ_{yz}	τ_{yx}
„	XAY;	p_z	„ „ „	σ_z	τ_{zx}	τ_{zy}.

210. — Diese 9 Spannungscomponenten sind durch 6 Gleichungen verbunden, zu deren Herleitung der folgende Hülfssatz vorausgeschickt werde:

Ist f ein nach jeder Richtung unendlich kleines Element der Spannungsebene F, so ist die Momentensumme der Spannungen in f für jede durch den Schwerpunkt von f gehende Axe eine unendlich kleine Grösse von der 4ten Ordnung.

Selbstverständlich ist diese Momentensumme unendlich klein von der 3ten Ordnung für jede durch einen beliebigen Punkt von f gezogene Axe; dass sie aber insbesondere unendlich klein der 4ten Ordnung wird, wenn man jenen Punkt mit dem Schwerpunkte von f zusammenfallen lässt, ergiebt sich leicht aus der Definition des Schwerpunktes und mit Rücksicht auf die stetige Veränderlichkeit der Spannung von Punkt zu Punkt der betreffenden Spannungsebene.

211. — Denkt man nun vom Punkte A als Eckpunkt aus ein unendlich kleines Parallelepipedum construirt, dessen Kanten $= dx$, dy, dz den Coordinatenaxen parallel sind, so sind die Kräfte, mit welchen die umgebende Körpermasse auf die drei um den Punkt A herumliegenden Seitenflächen nach den Richtungen AX, AY, AZ einwirkt, bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung:

Richtung	AX	AY	AZ
	$-\sigma_x\, dy\, dz$	$-\tau_{xy}\, dy\, dz$	$-\tau_{xz}\, dy\, dz$
	$-\tau_{yx}\, dz\, dx$	$-\sigma_y\, dz\, dx$	$-\tau_{yz}\, dz\, dx$
	$-\tau_{zx}\, dx\, dy$	$-\tau_{zy}\, dx\, dy$	$-\sigma_z\, dx\, dy$

und jenigen Kräfte, welche auf die 3 übrigen Seitenflächen ausgeübt werden, die um den Eckpunkt herumliegen, dessen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind:

$$\left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx}dx\right)dy\,dz;\ \left(\tau_{xy} + \frac{d\tau_{xy}}{dx}dx\right)dy\,dz;\ \left(\tau_{xz} + \frac{d\tau_{xz}}{dx}dx\right)dy\,dz$$

$$\left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy}dy\right)dz\,dx;\ \left(\sigma_y + \frac{d\sigma_y}{dy}dy\right)dz\,dx;\ \left(\tau_{yz} + \frac{d\tau_{yz}}{dy}dy\right)dz\,dx$$

$$\left(\tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz}dz\right)dx\,dy;\ \left(\tau_{zy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz}dz\right)dx\,dy;\ \left(\sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz}dz\right)dx\,dy.$$

Endlich kann auf die Masse des Parallelepipedums selbst noch eine äussere Kraft wirken (insbesondere z. B. die Schwerkraft), deren Componenten nach den Coordinatenaxen sind:

$$X\,dx\,dy\,dz \qquad Y\,dx\,dy\,dz \qquad Z\,dx\,dy\,dz,$$

unter X, Y, Z die Componenten dieser auf die Volumeinheit bezogenen Kraft verstanden.

Das Gleichgewicht aller dieser 21 Kräfte an dem Parallelepipedum wird durch die bekannten 6 Gleichungen ausgedrückt. Die drei ersten derselben geben nach Division mit dem gemeinschaftlichen Faktor $dx\,dy\,dz$:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} + X = 0$$

$$\frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} + Y = 0$$

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_z}{dz} + Z = 0.$$

Die drei übrigen Gleichgewichtsbedingungen, nämlich die Momentengleichungen für 3 Axen, die man durch den Mittelpunkt des Parallelepipedums parallel seinen Kanten gezogen denken möge, führen mit Rücksicht auf den Hülfssatz sub Nr. 210 zu den einfachen Beziehungen (cf. Nr. 10):

$$\tau_{yz} = \tau_{zy};\ \tau_{zx} = \tau_{xz};\ \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

In der Folge möge kürzer

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \text{ mit } \tau_x$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \text{ mit } \tau_y$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ mit } \tau_z$$

bezeichnet werden; dann sind also die 6 Spannungen

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

an die folgenden 3 Gleichungen gebunden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dz} + \frac{d\tau_z}{dy} + X = 0 \\ \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_z}{dx} + \frac{d\tau_x}{dz} + Y = 0 \\ \frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{d\tau_x}{dy} + \frac{d\tau_y}{dx} + Z = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\mathrm{I}).$$

212. — Durch die 6 Spannungen

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

ist die Spannung p der Richtung (Winkel mit den Axen λ, μ, ν) und Grösse nach bestimmt, welche im Punkte A einer Ebene F stattfindet, deren Normale AB die Winkel α, β, γ mit den Axen bildet. Schneidet man nämlich von der durch die Ebenen YAZ, ZAX, XAY begrenzten körperlichen Ecke ein unendlich kleines Tetraeder ab durch eine zu AB senkrechte Ebene, welche die Kanten AX, AY, AZ in den Punkten a, b, c schneiden möge, so sind, wenn die Seitenebene $abc = f$ gesetzt wird, die drei übrigen:

$$bAc = f\cos\alpha;\; cAa = f\cos\beta;\; aAb = f\cos\gamma,$$

und das Gleichgewicht der Kräfte an diesem Tretaeder führt zu den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} p\cos\lambda = \sigma_x\cos\alpha + \tau_y\cos\gamma + \tau_z\cos\beta \\ p\cos\mu = \sigma_y\cos\beta + \tau_z\cos\alpha + \tau_x\cos\gamma \\ p\cos\nu = \sigma_z\cos\gamma + \tau_x\cos\beta + \tau_y\cos\alpha \end{array}\right\} \;\ldots\; \text{(II)}.$$

Die auf die Masse des Tretaeders selbst wirkende äussere Kraft kommt in diesen Gleichungen nicht vor, weil sie mit dem Volumen unendlich klein von der 3ten Ordnung ist, während die auf die Begrenzungsflächen wirkenden Spannungskräfte mit diesen Flächen unendlich klein von der 2ten Ordnung sind.

Sofern die rechten Seiten der Gleichungen (II) beziehungsweise gleich sind den Componenten von p_x, p_y, p_z (cf. Nr. 209) nach der Richtung AB, so liegt darin das folgende Gesetz:

Sind AB und AC zwei beliebige Richtungen, so ist für den Punkt A die nach AB genommene Spannung in der zu AC senkrechten Ebene = der nach AC genommenen Spannung in der zu AB senkrechten Ebene. Es ist dies die Verallgemeinerung des Gesetzes, welches für zwei sich rechtwinkelig schneidende Richtungen durch die Gleichungen:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy};\; \tau_{zx} = \tau_{xz};\; \tau_{xy} = \tau_{yx} \;\text{(Nr. 211)}$$

ausgedrückt wurde.

213. — Wenn man die Gleichungen (II) quadrirt und dann addirt, so erhält man mit

$$\begin{array}{l} P_x = (\sigma_y + \sigma_z)\,\tau_x + \tau_y\,\tau_z \\ P_y = (\sigma_z + \sigma_x)\,\tau_y + \tau_z\,\tau_x \\ P_z = (\sigma_x + \sigma_y)\,\tau_z + \tau_x\,\tau_y \end{array}$$

$$p^2 = p_x^2\cos^2\alpha + p_y^2\cos^2\beta + p_z^2\cos^2\gamma + 2P_x\cos\beta\cos\gamma + 2P_y\cos\gamma\cos\alpha + 2P_z\cos\alpha\cos\beta.$$

Werden nach Analogie dieser Gleichung die Quadrate der Spannungen p_1, p_2, p_3 ausgedrückt, welche im Schnittpunkte A von 3 beliebigen sich rechtwinkelig schneidenden Ebenen stattfinden, so liefert die Addition dieser 3 Ausdrücke die Gleichung:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

d. h. die Summe der Quadrate der Spannungen in 3 Ebenen,

welche in einem Punkte A sich rechtwinkelig schneiden, ist für diesen Punkt constant.

214. — Man erhält eine geometrische Darstellung des Aenderungsgesetzes der Grösse von p mit der Lage der zugehörigen Spannungsebene für einen gegebenen Punkt A, indem man auf jeder von A aus gezogenen Richtung AB eine Länge $r = \frac{1}{p}$ = dem reciproken Werthe der Spannung in der zu AB senkrechten Ebene abgetragen und die Endpunkte dieser Strecken r durch eine stetige Fläche verbunden denkt. Sind

$$\xi = r\cos\alpha\ ;\ \eta = r\cos\beta\ ;\ \zeta = r\cos\gamma$$

die auf die Axen AX, AY, AZ bezogenen Coordinaten eines solchen Endpunktes, also eines beliebigen Punktes der Fläche, so ergiebt sich vermittels der Gleichung für p^2 sub Nr. 213 die folgende Gleichung dieser Fläche:

$$1 = p_x{}^2\xi^2 + p_y{}^2\eta^2 + p_z{}^2\zeta^2 + 2P_x\eta\zeta + 2P_y\zeta\xi + 2P_z\xi\eta,$$

d. i. die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoids. Wäre dasselbe gegeben, so fände man die Grösse der Spannung p im Mittelpunkte A irgend einer Diametralebene sofort = dem reciproken Werthe des zu ihr senkrechten Radius.

Auch ergiebt sich, dass diejenigen beiden Ebenen, in welchen im Punkte A die Spannung p am grössten und am kleinsten ist, sich rechtwinkelig schneiden, indem sie mit zweien der 3 Symmetrie- oder Hauptdiametralebenen des Ellipsoids zusammenfallen.

215. — Die Normalspannung σ im Punkte A nach der Richtung AB bildet mit der resultirenden Spannung p in der zu AB senkrechten Ebene im Allgemeinen einen gewissen Winkel φ (Nr. 209), und es ist:

$$\sigma = p\cos\varphi = p\,(\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma),$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (II):

$$\sigma = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma + 2\tau_x\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_y\cos\gamma\cos\alpha + 2\tau_z\cos\alpha\cos\beta.$$

Diese Gleichung, welche in Beziehung auf α, β, γ von derselben Form ist wie die Gleichung für p^2 in Nr. 213, gestattet ähnliche Folgerungen wie dort; insbesondere ergiebt sich, dass für jeden Punkt die (algebraische) Summe der Normalspannungen nach je 3 sich rechtwinkelig schneidenden Richtungen constant ist.

216. — Zur geometrischen Darstellung des Aenderungsgesetzes von σ mit der Richtung AB möge auf dieser die Länge $r = \frac{1}{\sqrt{\pm\sigma}}$ = dem reciproken Werthe der Quadratwurzel aus dem Absolutwerthe von σ abgetragen und ebenso mit jeder anderen von A aus zu zie-

henden Richtung AB verfahren werden. Sind dann wieder ξ, η, ζ die auf die Axen AX, AY, AZ bezogenen Coordinaten der Endpunkte dieser Strecken r oder der sie verbindenden stetigen Fläche, so ergiebt sich die Gleichung der letzteren aus dem Ausdrucke von σ (Nr. 215):

$$\pm 1 = \sigma_x \xi^2 + \sigma_y \eta^2 + \sigma_z \zeta^2 + 2\tau_x \eta \zeta + 2\tau_y \zeta \xi + 2\tau_z \xi \eta,$$

d. i. die Mittelpunktsgleichung einer Fläche 2ten Grades, welche, wenn sie gegeben ist, die Normalspannung σ im Mittelpunkte A nach der Richtung eines Radius r sofort $= \pm \frac{1}{r^2}$ bestimmt.

Eine Fläche 2ten Grades hat 3 zu einander senkrechte Hauptaxen, für welche als Coordinatenaxen die Glieder mit den Producten der Coordinaten aus der Gleichung der Fläche verschwinden, für welche also hier

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$

ist. Daraus folgt, dass es in jedem Punkte A des Körpers 3 zu einander senkrechte Ebenen giebt, in welchen die Tangentialspannungen für diesen Punkt = Null und zu denen also die betreffenden Spannungen p senkrecht sind. Diese Spannungen, deren Richtungen mit den Hauptaxen der vorgenannten Fläche 2ten Grades zusammenfallen, heissen die Hauptspannungen für den betreffenden Punkt und seien mit

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3$$

bezeichnet.

217. — Die Normalspannung nach der Richtung AB, welche mit den Richtungen der Hauptspannungen die Winkel α, β, γ bildet, ist jetzt:

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma$$

und die Gleichung der Fläche 2ten Grades, deren in AB fallender Halbmesser $= \frac{1}{\sqrt{\pm\sigma}}$ ist, wird für die Richtungen der Hauptspannungen als Coordinatenaxen:

$$\pm 1 = \sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 + \sigma_3 \zeta^2.$$

Sind alle Hauptspannungen positiv, so gilt hierbei das Zeichen +, sind sie negativ, so gilt das Zeichen −; in beiden Fällen ist die Fläche ein Ellipsoid und σ ist nach jeder Richtung im ersten Falle positiv, im zweiten Falle negativ.

Sind aber die Hauptspannungen theils positiv, theils negativ, so gelten beide Vorzeichen, und die den beiden Gleichungen entsprechenden Flächen sind 2 Hyperboloide, welche sich gegenseitig ergänzen und durch einen gemeinschaftlichen Asymptotenkegel mit der Gleichung:

$$0 = \sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 + \sigma_3 \zeta^2$$

von einander getrennt sind; die Normalspannung σ ist positiv, negativ oder Null, je nachdem die Richtung AB das eine oder das andere Hyperboloid trifft oder aber in der Kegelfläche liegt.

In allen Fällen ist unter den 3 Hauptspannungen die grösste positive und die kleinste negative (dem Absolutwerthe nach folglich auch grösste)

Normalspannung enthalten, welche im Punkte A nach irgend einer Richtung stattfindet.

218. — Mit $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ wird auch (Nr. 213):

$$P_x = P_y = P_z = 0$$

und es fallen sonach die Hauptaxen des in Nr. 214 besprochenen Ellipsoids mit den Richtungen der Hauptspannungen zusammen. Auf letztere als Coordinatenaxen bezogen wird die Gleichung jenes Ellipsoids:

$$1 = \sigma_1^2 \xi^2 + \sigma_2^2 \eta^2 + \sigma_3^2 \zeta^2$$

und für die Spannung p in der Ebene, deren Normale die Winkel α, β, γ mit den Richtungen der Hauptspannungen bildet, erhält man die Gleichung:

$$p^2 = \sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \cos^2\gamma.$$

219. — Durch das Ellipsoid

$$1 = \sigma_1^2 \xi^2 + \sigma_2^2 \eta^2 + \sigma_3^2 \zeta^2$$

wird nur die Grösse der Spannung p geometrisch dargestellt, welche im Punkte A irgend einer Ebene F stattfindet, deren Normale AB die Winkel α, β, γ mit den zu Coordinatenaxen genommenen Richtungen der Hauptspannungen bildet, und selbst wenn die Fläche

$$\pm 1 = \sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 + \sigma_3 \zeta^2$$

zur Darstellung der Normalspannung σ nach der Richtung AB zu Hülfe genommen wird, so ist dadurch die Richtung AC der Spannung p noch nicht bestimmt, sondern nur ihr Winkel $\varphi = arc\cos\frac{\sigma}{p}$ mit der Richtung AB.

Zur geometrischen Darstellung von p nach Grösse und Richtung zugleich dient die gleichfalls auf die Richtungen der Hauptspannungen als Coordinatenaxen bezogene Fläche:

$$\pm 1 = \frac{\xi^2}{\sigma_1} + \frac{\eta^2}{\sigma_2} + \frac{\zeta^2}{\sigma_3},$$

welche einem Ellipsoide oder zwei sich ergänzenden Hyperboloiden entspricht, je nachdem die Hauptspannungen gleiche oder ungleiche Zeichen haben. Ist nämlich C (Coordinaten: ξ, η, ζ) der Durchschnittspunkt dieser Fläche mit der Richtung AC (Winkel mit den Axen $= \lambda$, μ, ν), F_1 die Berührungsebene im Punkte C, B der Schnittpunkt von F_1 mit AB, ferner

$$AC = r,\ AB = s,\ BC = t,$$

so ist:

$$\xi = r\cos\lambda;\quad \eta = r\cos\mu;\quad \zeta = r\cos\nu$$

und nach dem Satze sub Nr. 212:

$$p\cos\lambda = \sigma_1\cos\alpha;\quad p\cos\mu = \sigma_2\cos\beta;\quad p\cos\nu = \sigma_3\cos\gamma.$$

Sind also a, b, c die Winkel, welche die Normale der Fläche im Punkte C mit den Axen bildet, so verhält sich:

$$\cos a : \cos b : \cos c = \frac{\xi}{\sigma_1} : \frac{\eta}{\sigma_2} : \frac{\zeta}{\sigma_3}$$
$$= \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma,$$

woraus folgt, dass F_1 parallel F und dass mithin die Spannung p nach dem der Spannungsebene F conjugirten Durchmesser der obigen Fläche gerichtet ist.

Durch Substitution in der Gleichung der Fläche erhält man ferner:

$$\pm 1 = r^2 \left(\frac{\cos^2 \lambda}{\sigma_1} + \frac{\cos^2 \mu}{\sigma_2} + \frac{\cos^2 \nu}{\sigma_3} \right) = \frac{r^2}{p} \cos \varphi$$

und mit $\pm r \cos \varphi = AB = s$:

$$p = rs.$$

Für die Normalspannung σ und die Tangentialspannung τ hat man:

$$\sigma = p \cos \varphi = \pm p \frac{s}{r} = \pm s^2$$

$$\tau = p \sin \varphi = \ \ p \frac{t}{r} = st.$$

220. — Zur **Bestimmung der Hauptspannungen nach Grösse und Richtung** vermittels der auf beliebig gewählte Axen bezogenen Spannungen:

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

dient die Erwägung, dass in den Gleichungen (II)

$$\lambda = \alpha, \quad \mu = \beta, \quad \nu = \gamma$$

wird, wenn $p = \sigma$ eine Hauptspannung ist. So erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_z \cos \beta + \tau_y \cos \gamma &= 0 \\
\tau_z \cos \alpha + (\sigma_y - \sigma) \cos \beta + \tau_x \cos \gamma &= 0 \\
\tau_y \cos \alpha + \tau_x \cos \beta + (\sigma_z - \sigma) \cos \gamma &= 0,
\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = \\
&= (\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \tau_x^2 : \tau_x \tau_y - \tau_z (\sigma_z - \sigma) : \tau_z \tau_x - \tau_y (\sigma_y - \sigma) \\
&= \tau_x \tau_y - \tau_z (\sigma_z - \sigma) : (\sigma_z - \sigma)(\sigma_x - \sigma) - \tau_y^2 : \tau_y \tau_z - \tau_x (\sigma_x - \sigma) \\
&= \tau_z \tau_x - \tau_y (\sigma_y - \sigma) : \tau_y \tau_z - \tau_x (\sigma_x - \sigma) : (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_z^2.
\end{aligned}$$

Die Substitution der ersten, zweiten oder dritten dieser Verhältnisswerthe für $\cos \alpha$, $\cos \beta$ $\cos \gamma$ in der ersten resp. zweiten oder dritten der obigen 3 Gleichungen liefert die cubische Gleichung:

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - (\sigma_x - \sigma) \tau_x^2 - (\sigma_y - \sigma) \tau_y^2 - (\sigma_z - \sigma) \tau_z^2 + \\ + 2 \tau_x \tau_y \tau_z = 0 \quad \ldots . \quad \text{(III)},$$

deren nothwendig reelle Wurzeln

$$\sigma = \sigma_1; \quad \sigma = \sigma_2; \quad \sigma = \sigma_3$$

den Hauptspannungen gleich sind. Zur Bestimmung der Winkel α, β, γ irgend einer dieser Hauptspannungen mit den Coordinatenaxen kann jedes der obigen 3 Doppelverhältnisse:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$$

in Verbindung mit der Gleichung:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

dienen, indem man für σ den Werth der betreffenden Hauptspannung substituirt. Uebersichtlicher gestaltet sich die Bestimmung dieser Winkel, wenn

man aus jenen Doppelverhältnissen durch Combination noch die folgenden ableitet:

$$\cos^2\alpha : \cos^2\beta : \cos^2\gamma =$$
$$= (\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma) - \tau_x^2 : (\sigma_z-\sigma)(\sigma_x-\sigma) - \tau_y^2 : (\sigma_x-\sigma)(\sigma_y-\sigma) - \tau_z^2$$

und $\cos\beta\cos\gamma : \cos\gamma\cos\alpha : \cos\alpha\cos\beta =$

$$= \tau_y\tau_z - \tau_x(\sigma_x-\sigma) : \tau_z\tau_x - \tau_y(\sigma_y-\sigma) : \tau_x\tau_y - \tau_z(\sigma_z-\sigma).$$

Aus ersterem folgt mit

$$n = (\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma) + (\sigma_z-\sigma)(\sigma_x-\sigma) + (\sigma_x-\sigma)(\sigma_y-\sigma) - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{(\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma) - \tau_x^2}{n}}$$

$$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{(\sigma_z-\sigma)(\sigma_x-\sigma) - \tau_y^2}{n}}$$

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma)(\sigma_y-\sigma) - \tau_z^2}{n}}.$$

Bei **einem** dieser 3 Wurzelwerthe kann das Vorzeichen beliebig genommen werden, wonach dann die Zeichen der beiden anderen durch das Doppelverhältniss der Cosinus-Producte oder durch die ursprünglichen Doppelverhältnisse der einfachen Cosinus bestimmt sind.

B. Die Ausdehnungen und Verschiebungen.

221. — Es seien im Punkte A (Coordinaten: x, y, z):

	ε_x	ε_y	ε_z	die Ausdehnungen
nach den Richtungen	AX	AY	AZ;	
	γ_{xy} und γ_{xz};	γ_{yz} und γ_{yx};	γ_{zx} und γ_{zy}	die Verschiebungen
der Ebenen	YAZ	ZAX	XAY	
nach den Richtungen	AY und AZ;	AZ und AX;	AX und AY.	

Die letzteren sind zu 2 und 2 einander gleich (cf. Nr. 8), und zwar

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy}\,;\quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}\,;\quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$$

= beziehungsweise den kleinen Aenderungen der ursprünglich rechten Winkel der vorgenannten Ebenen an den Kanten AX, AY, AZ; in der Folge soll deshalb kürzer

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} \text{ mit } \gamma_x$$
$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} \text{ mit } \gamma_y$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \text{ mit } \gamma_z$$

bezeichnet werden.

Sind ferner ξ, η, ζ die mit der Deformation verbundenen kleinen Aenderungen der Coordinaten x, y, z des Punktes A, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{d\xi}{dx}\,; & \gamma_x &= \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} \\ \varepsilon_y &= \frac{d\eta}{dy}\,; & \gamma_y &= \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} \\ \varepsilon_z &= \frac{d\zeta}{dz}\,; & \gamma_z &= \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (IV).$$

In Betreff der Verschiebungen cf. Nr. 201. Was die Ausdehnungen betrifft, so ist, wenn auf AX die unendlich kleine Länge $AA_1 = dx$ abgetragen wird, $\frac{d\xi}{dx}dx$ die relative Verrückung von A_1 gegen A nach der Richtung AX, d. h. die totale Ausdehnung, mithin $\frac{d\xi}{dx}$ die specifische Ausdehnung von AA_1.

222. — Durch die 6 Grössen

$$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_z$$

lässt sich die Ausdehnung ε im Punkte A nach der Richtung AB, welche mit den Axen die Winkel α, β, γ bildet, ausdrücken. Ist nämlich B ein Punkt dieser Richtung mit den Coordinaten

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz,$$

so sind deren Aenderungen:

$$\xi_1 = \xi + \frac{d\xi}{dx}dx + \frac{d\xi}{dy}dy + \frac{d\xi}{dz}dz$$

$$\eta_1 = \eta + \frac{d\eta}{dx}dx + \frac{d\eta}{dy}dy + \frac{d\eta}{dz}dz$$

$$\zeta_1 = \zeta + \frac{d\zeta}{dx}dx + \frac{d\zeta}{dy}dy + \frac{d\zeta}{dz}dz,$$

während die ursprüngliche Länge $AB = ds$ in $ds\,(1 + \varepsilon)$ übergeht. Aus den Gleichungen:

$$ds^2(1+\varepsilon)^2 = (dx + \xi_1 - \xi)^2 + (dy + \eta_1 - \eta)^2 + (dz + \zeta_1 - \zeta)^2$$

und $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

folgt dann bei Vernachlässigung der kleinen Grössen von der 2ten Ordnung:

$$\varepsilon\, ds^2 = (\xi_1 - \xi)\, dx + (\eta_1 - \eta)\, dy + (\zeta_1 - \zeta)\, dz$$

und daraus durch Einsetzung der Werthe von ξ_1, η_1, ζ_1, ferner mit

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (IV):

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta\cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma\cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha\cos\beta.$$

223. — Dieser Ausdruck von ε hat in Beziehung auf α, β, γ dieselbe Form wie der Ausdruck von σ sub Nr. 215, gestattet also auch ähnliche Folgerungen, wie jener. Insbesondere ergiebt sich zunächst, dass für jeden Punkt die Summe der Ausdehnungen nach je 3 sich rechtwinkelig schneidenden Richtungen constant ist.

Zugleich hat hier diese constante Summe eine bemerkenswerthe Bedeutung. Da nämlich der Inhalt des Parallelepipedums $dx\,dy\,dz$ nur durch die Aenderungen der Abstände, nicht durch die gegenseitigen Verschiebungen seiner parallelen Seitenflächen sich ändert, so ist der geänderte Inhalt bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$dx\,(1 + \varepsilon_x)\,.\,dy\,(1 + \varepsilon_y)\,.\,dz\,(1 + \varepsilon_z) = dx\,dy\,dz\,(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

und es hat also die constante Summe

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

die Bedeutung des Volumenausdehnungs-Coefficienten in dem betreffenden Punkte.

224. — Auch lässt sich ε wie σ durch den positiv oder negativ genommenen reciproken Werth des Quadrats des Halbmessers einer Fläche 2ten Grades geometrisch darstellen (Nr. 216). Wird diese Fläche auf ihre Hauptaxen als Coordinatenaxen bezogen, so verschwinden aus ihrer Gleichung die Glieder mit den Producten der Coordinaten, wird also

$$\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0;$$

es giebt sonach in jedem Punkte 3 zu einander senkrechte Ebenen, deren Verschiebungen für diesen Punkt = 0 sind und welche natürlich dieselben sind wie diejenigen Ebenen, in welchen

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$

ist. Die Ausdehnungen nach den zu diesen Ebenen senkrechten, d. h. nach den Richtungen der Hauptspannungen heissen Hauptausdehnungen und seien mit

$$\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3$$

bezeichnet; unter ihnen befindet sich die grösste und die kleinste Ausdehnung (algebraisch verstanden), welche in dem betreffenden Punkte nach irgend einer Richtung stattfindet.

Nach einer Richtung, welche mit diesen 3 ausgezeichneten Richtungen die Winkel α, β, γ bildet, ist:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma.$$

225. — Zur Bestimmung der Hauptausdehnungen nach Grösse und Richtung vermittels der auf beliebig gewählte Axen bezogenen Ausdehnungen und Verschiebungen

$$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_z$$

dient die Erwägung, dass eine Hauptausdehnung als ein Maximal- oder Minimalwerth von ε charakterisirt werden kann, welcher sonach unverändert bleibt, wenn die Richtung unendlich wenig geändert wird. Setzt man also in der Gleichung für ε sub Nr. 222

$$\varepsilon(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \text{ für } \varepsilon$$

und differenzirt die Gleichung nach einander in Beziehung auf α, β und γ, so wird, wenn man dabei ε als Constante behandelt, dieselbe ebendadurch als eine Hauptausdehnung charakterisirt, für welche so die folgenden 3 Gleichungen erhalten werden:

$$2(\varepsilon_x - \varepsilon)\cos\alpha + \gamma_z \cos\beta + \gamma_y \cos\gamma = 0$$
$$\gamma_z \cos\alpha + 2(\varepsilon_y - \varepsilon)\cos\beta + \gamma_x \cos\gamma = 0$$
$$\gamma_y \cos\alpha + \gamma_x \cos\beta + 2(\varepsilon_z - \varepsilon)\cos\gamma = 0.$$

Sie unterscheiden sich von den Gleichungen zur Bestimmung der Hauptspannungen (Nr. 220) nur dadurch, dass 2ε an die Stelle von σ und γ an

die Stelle von τ getreten ist; durch dieselben Substitutionen erhält man deshalb auch für ε die cubische Gleichung:

$$4(\varepsilon_x-\varepsilon)(\varepsilon_y-\varepsilon)(\varepsilon_z-\varepsilon)-(\varepsilon_x-\varepsilon)\gamma_x^2-(\varepsilon_y-\varepsilon)\gamma_y^2-(\varepsilon_z-\varepsilon)\gamma_z^2+ \\ +\gamma_x\gamma_y\gamma_z=0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(IIIa)}$$

sowie die dortigen entsprechenden Ausdrücke von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *).

C. Beziehungen zwischen den Spannungen, Ausdehnungen und Verschiebungen.

228. — Die in diesem Capitel unter **A.** und **B.** dargestellten Gesetze sind unabhängig von der physikalischen Beschaffenheit des Körpers; die Beziehungen aber, welche zwischen den Normal- und Tangentialspannungen einerseits und den Ausdehnungen und Verschiebungen anderseits stattfinden, sind wesentlich durch die Molekularbeschaffenheit des Körpers bedingt. Hier werden nur isotrope Körper vorausgesetzt, weil das Holz als dasjenige unter den technisch verwendeten Materialien, welches auch nicht näherungsweise als isotrop gelten kann, seiner discontinuirlichen Molekularbeschaffenheit wegen überhaupt kaum Gegenstand von allgemeinen Untersuchungen der nachfolgenden Art sein kann, sondern vielmehr bei seiner verschiedenartigen Verwendung als Constructionsmaterial den betreffenden Rechnungen nur solche Erfahrungswerthe mit Sicherheit zu Grunde zu legen sind, welche aus Versuchen unter Verhältnissen abgeleitet wurden, die denen des betreffenden Falles der Anwendung ganz analog sind.

Wenn auf einen solchen isotropen Körper nur nach einer Richtung ein äusserer Zug (algebraisch verstanden, so dass ein negativer Zug einen Druck bedeutet) ausgeübt wird, so ist die dadurch nach dieser Richtung, etwa nach der Richtung der x-Axe, hervorgerufene Normalspannung eine Hauptspannung $=\sigma_1$ und zwar $\sigma_1 = E\varepsilon_x$, sofern die Stärke des Zuges eine solche Grenze nicht überschreitet, dass das Verhältniss der Spannung zur entsprechenden Ausdehnung ε_x dem Elasticitätsmodul E gleich gesetzt werden darf (Nr. 11); zugleich ist damit nach jeder zur Zugrichtung senkrechten Richtung eine Ausdehnung $= -\frac{\varepsilon_x}{m}$ verbunden.*)

Ebenso ist für einen nur nach der Richtung der y-Axe ausgeübten Zug: $\sigma_2 = E\varepsilon_y$ und nach jeder dazu senkrechten Richtung die Ausdehnung

---

*) Dieselbe Betrachtung, welche hier zur Bestimmung der Hauptausdehnungen benutzt wurde, hätte auch in Nr. 220 in Betreff der Hauptspannungen zu Grunde gelegt werden können, und würde dann die Analogie der Gleichungen für $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$ und $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3$ schon aus der Analogie der Gleichungen für σ und ε sub Nr. 215 und Nr. 222 haben gefolgert werden können. Sie kann auch so ausgedrückt werden, dass ε an die Stelle von σ und $\frac{1}{2}\gamma$ an die Stelle von τ tritt.

*) Ueber den Werth von m cf. Nr. 169.

$= -\frac{\varepsilon_y}{m}$, sowie für einen nur nach der Richtung der z-Axe ausgeübten Zug: $\sigma_3 = E\varepsilon_z$ und nach jeder dazu senkrechten Richtung die Ausdehnung $= -\frac{\varepsilon_z}{m}$.

Finden die genannten 3 Züge gleichzeitig statt, so bleiben die Spannungen σ_1, σ_2, σ_3 Hauptspannungen, die Hauptausdehnungen aber werden:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{m}, \text{ analog } \varepsilon_2 \text{ und } \varepsilon_3,$$

woraus zur Berechnung der Hauptausdehnungen durch die Hauptspannungen die Gleichungen folgen:

$$\left.\begin{aligned} E\varepsilon_1 &= \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \\ E\varepsilon_2 &= \sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{m} \\ E\varepsilon_3 &= \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m} \end{aligned}\right\} \ldots (V).$$

Zur umgekehrten Berechnung der Hauptspannungen durch die Hauptausdehnungen hat man nur diese Gleichungen nach σ_1, σ_2, σ_3 aufzulösen und findet so, wenn der Volumenausdehnungs-Coefficient

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \mu$$

und die Constante

$$\frac{1}{2}\,\frac{m}{m+1}\,E = G$$

gesetzt wird*):

$$\sigma_1 = 2G\left(\varepsilon_1 + \frac{\mu}{m-2}\right)$$

$$\sigma_2 = 2G\left(\varepsilon_2 + \frac{\mu}{m-2}\right)$$

$$\sigma_3 = 2G\left(\varepsilon_3 + \frac{\mu}{m-2}\right).$$

227. — Diese Gleichungen gelten aber nicht nur für die Richtungen der Hauptspannungen, sondern für beliebige 3 zu einander senkrechte Richtungen; denn für eine beliebige Richtung, welche mit denen der Hauptspannungen die Winkel α, β, γ bildet, ist

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma \text{ nach Nr. 217} \\ &= 2G\left(\varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma + \frac{\mu}{m-2}\right) \text{ nach Nr. 226} \\ &= 2G\left(\varepsilon + \frac{\mu}{m-2}\right) \text{ nach Nr. 224;} \end{aligned}$$

*) Dass dieses G der Schubelasticitätsmodul ist, wie schon in Nr. 168 durch eine besondere Betrachtung gefunden wurde, braucht hier nicht als bekannt vorausgesetzt zu werden, wird sich vielmehr aus dieser allgemeineren Untersuchung von selbst ergeben: Nr. 228.

insbesondere also auch für beliebige rechtwinkelige Coordinatenaxen:

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{m-2}\right) \quad E\varepsilon_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}$$
$$\sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{m-2}\right) \quad E\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}$$
$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{m-2}\right) \quad E\varepsilon_z = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}$$
$$\mu = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Mit $\sigma_y = \sigma_z = 0$ folgt hieraus: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{1}{m}\varepsilon_x$ als Verallgemeinerung des Fundamentalgesetzes, von welchem in Nr. 226 ausgegangen wurde für den besonderen Fall, dass σ_x eine Hauptspannung ist.

228. — Die Bedeutung der Constanten G ergiebt sich daraus, dass die Normalspannung σ nach einer Richtung, welche mit den beliebigen Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ bildet,

$$\sigma = 2G\left(\varepsilon + \frac{\mu}{m-2}\right) \text{ nach Nr. 222 auch}$$
$$= 2G\Big[\varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta\cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma\cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha\cos\beta + \frac{\mu}{m-2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\Big]$$

ist, während nach Nr. 215:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + 2\tau_x \cos\beta\cos\gamma + 2\tau_y \cos\gamma\cos\alpha + 2\tau_z \cos\alpha\cos\beta$$

ist. Aus der Vergleichung beider Ausdrücke von σ ergiebt sich mit Rücksicht auf Nr. 227:

$$(G\gamma_x - \tau_x)\cos\beta\cos\gamma + (G\gamma_y - \tau_y)\cos\gamma\cos\alpha + (G\gamma_z - \tau_z)\cos\alpha\cos\beta = 0$$

für jede Richtung α, β, γ, also:

$$\tau_x = G\gamma_x; \quad \tau_y = G\gamma_y; \quad \tau_z = G\gamma_z,$$

wodurch G als der Schubelasticitätsmodul charakterisirt ist.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (IV) lassen sich schliesslich die Spannungen $\sigma_x \; \sigma_y \; \sigma_z \; \tau_x \; \tau_y \; \tau_z$ folgendermassen durch die Coordinatenänderungen $\xi \; \eta \; \zeta$ ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{\mu}{m-2}\right); & \tau_x &= G\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)\\
\sigma_y &= 2G\left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{\mu}{m-2}\right); & \tau_y &= G\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)\\
\sigma_z &= 2G\left(\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\mu}{m-2}\right); & \tau_z &= G\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)\\
\mu &= \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}; & G &= \frac{1}{2}\frac{m}{m+1}E
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(VI)}.$$

SIEBENTES CAPITEL.

Zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit.

229. — Die in Nr. 5 bezeichnete allgemeine Hauptaufgabe der Festigkeitslehre erfordert die Ermittelung der Maximalwerthe von ε' und ε'', d. h. der grössten Absolutwerthe der positiven und der negativen Ausdehnung, welche in einem beliebigen Punkte eines Körpers nach irgend welchen Richtungen stattfinden, wenn die Gestalt und die Art der Belastung des Körpers gegeben sind. Diese Ermittelung ist (cf. Nr. 224) enthalten in der Bestimmung der 3 Hauptausdehnungen für den betreffenden Punkt, welche im Allgemeinen auf folgende Weise gefunden werden.

Die Ausdrücke (Nr. 228):

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{\mu}{m-2}\right); \quad \tau_x = G\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)\\ \sigma_y &= 2G\left(\frac{d\eta}{dy}+\frac{\mu}{m-2}\right); \quad \tau_y = G\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)\\ \sigma_z &= 2G\left(\frac{d\zeta}{dz}+\frac{\mu}{m-2}\right); \quad \tau_z = G\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots \text{(VI)},$$

worin $\mu = \frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}$

und $G = \frac{1}{2}\,\frac{m}{m+1}\,E$

ist, werden in die Gleichungen (Nr. 211):

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\sigma_x}{dx}+\frac{d\tau_y}{dz}+\frac{d\tau_z}{dy}+X=0\\ \frac{d\sigma_y}{dy}+\frac{d\tau_z}{dx}+\frac{d\tau_x}{dz}+Y=0\\ \frac{d\sigma_z}{dz}+\frac{d\tau_x}{dy}+\frac{d\tau_y}{dx}+Z=0\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots \text{(I)}$$

eingeführt, welche dadurch 3 simultane partielle Differentialgleichungen 2ter Ordnung für die Functionen ξ, η, ζ der ursprünglichen Coordinaten x, y, z des betrachteten beliebigen Körperpunktes werden. Durch die Integration dieser Gleichungen werden Constante oder vielmehr im Allgemeinen Functionen eingeführt, welche nur in Beziehung auf diejenige Veränderliche constant sind, d. h. diejenige Veränderliche nicht enthalten, nach welcher

eben integrirt wird, und diese Functionen sind durch die Oberflächenbedingungen bestimmt, nämlich theils dadurch, dass die Spannungscomponenten

$$p\cos\lambda,\quad p\cos\mu,\quad p\cos\nu$$

in den Gleichungen (Nr. 212):

$$\left.\begin{aligned} p\cos\lambda &= \sigma_x\cos\alpha + \tau_y\cos\gamma + \tau_z\cos\beta \\ p\cos\mu &= \sigma_y\cos\beta + \tau_z\cos\alpha + \tau_x\cos\gamma \\ p\cos\nu &= \sigma_z\cos\gamma + \tau_x\cos\beta + \tau_y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (II)$$

für die Punkte der Körperoberfläche gegebene Werthe haben, theils dadurch, dass ξ, η, ζ selbst für gewisse Punkte gegeben, insbesondere = Null gegeben sind (feste Unterstützungspunkte) oder auch zu den betreffenden Pressungen in gewissen Beziehungen stehen (nachgiebige, elastische Unterlagen).

Wenn ξ, η, ζ so als Functionen von x, y, z gefunden sind, findet man entweder

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

nach (VI), dann die Hauptspannungen als Wurzeln der Gleichung (Nr. 220):

$$(\sigma_x-\sigma)(\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma) - (\sigma_x-\sigma)\tau_x^2 - (\sigma_y-\sigma)\tau_y^2 - (\sigma_z-\sigma)\tau_z^2 + \\ + 2\tau_x\tau_y\tau_z = 0 \quad \ldots\ldots (III)$$

und endlich die Hauptausdehnungen (Nr. 226):

$$\left.\begin{aligned} E\varepsilon_1 &= \sigma_1 - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{m} \\ E\varepsilon_2 &= \sigma_2 - \frac{\sigma_3+\sigma_1}{m} \\ E\varepsilon_3 &= \sigma_3 - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (V),$$

oder auch die Ausdehnungen und Verschiebungen

$$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_z$$

mittels der Gleichungen (Nr. 221):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{d\xi}{dx};\quad \gamma_x = \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} \\ \varepsilon_y &= \frac{d\eta}{dy};\quad \gamma_y = \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} \\ \varepsilon_z &= \frac{d\zeta}{dz};\quad \gamma_z = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (IV)$$

und dann die Hauptausdehnungen als Wurzeln der Gleichung (Nr. 225):

$$4(\varepsilon_x-\varepsilon)(\varepsilon_y-\varepsilon)(\varepsilon_z-\varepsilon) - (\varepsilon_x-\varepsilon)\gamma_x^2 - (\varepsilon_y-\varepsilon)\gamma_y^2 - (\varepsilon_z-\varepsilon)\gamma_z^2 + \\ + \gamma_x\gamma_y\gamma_z = 0 \quad \ldots\ldots (III,a).$$

230. — Von besonderen Fällen sind namentlich diejenigen bemerkenswerth, in welchen die Gleichung (III) oder (III, a) sich in eine lineare und eine quadratische Gleichung zerlegen lässt. Dies ist erstlich dann der Fall, wenn für eine der Coordinatenaxen die Tangentialspannung = Null ist und für die beiden anderen die Normalspannungen gleich sind, wenn also z. B.

$$\tau_x = 0 \text{ und } \sigma_y = \sigma_z$$

ist. Dann zerfällt Gleichung (III) in die beiden Gleichungen:

$$\sigma_y - \sigma = 0 \text{ und } (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_y^2 - \tau_z^2 = 0,$$

woraus folgt, wenn

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$$

gesetzt wird: $\sigma_1 = \sigma_y$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_2\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}}{2};$$

das obere Zeichen der Wurzel entspricht σ_2, das untere σ_3. Bildet ferner die Richtung

der ersten Hauptspannung σ_1 die Winkel α_1 β_1 γ_1
„ zweiten „ σ_2 „ „ α_2 β_2 γ_2
„ dritten „ σ_3 „ „ α_3 β_3 γ_3

mit den Axen der x, y, z, so findet man nach Nr. 220:

$$\cos\alpha_1 = 0 \qquad \cos\beta_1 = \frac{\tau_y}{\tau} \qquad \cos\gamma_1 = -\frac{\tau_z}{\tau}$$

$$\cos\binom{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\sigma - \sigma_y}{\sqrt{n}}; \quad \cos\binom{\beta_2}{\beta_3} = \frac{\tau_z}{\sqrt{n}}; \quad \cos\binom{\gamma_2}{\gamma_3} = \frac{\tau_y}{\sqrt{n}};$$

die letzteren Ausdrücke, worin

$$n = (\sigma - \sigma_y)^2 + \tau^2$$

ist, liefern die Cosinus der Richtungswinkel der zweiten oder dritten Hauptspannung, jenachdem darin $\sigma = \sigma_2$ oder $\sigma = \sigma_3$ gesetzt wird.

Es lässt sich hieraus folgern, dass die erste Hauptspannung σ_1 parallel der Ebene YZ senkrecht zur resultirenden Tangentialspannung τ gerichtet ist, dass also die beiden anderen σ_2 und σ_3 in der Ebene liegen, welche durch die Richtungslinie von τ parallel der x-Axe geht; in dieser Ebene ist ihre Lage bestimmt durch den Winkel zwischen σ_2 und τ, für welchen man findet:

$$tg(\tau, \sigma_2) = \frac{\sigma_2 - \sigma_y}{\tau} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}\right)^2},$$

vorausgesetzt, dass der Winkel (τ, σ_2) gerechnet wird von der Richtung τ durch den rechten Winkel zur positiven x-Axe und eventualiter darüber hinaus.

Mit Hülfe der Gleichungen (V) ergiebt sich endlich:

$$E\varepsilon_1 = -\frac{1}{m}\sigma_x + \frac{m-1}{m}\sigma_y$$

$$E\binom{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{m-1}{2m}\sigma_x + \frac{m-3}{2m}\sigma_y \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}.$$

Ist insbesondere $\sigma_y = \sigma_z = 0$, so wird:

$$\sigma_1 = 0; \quad \left.\begin{matrix}\sigma_2\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$tg(\tau, \sigma_2) = \frac{\sigma_2}{\tau} = \frac{\sigma_x}{2\tau} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_x}{2\tau}\right)^2}$$

$$E\varepsilon_1 = -\frac{1}{m}\sigma_x; \quad E\binom{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{m-1}{2m}\sigma_x \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}.$$

231. — Die Gleichung (III) zerfällt auch dann in eine lineare und eine quadratische Gleichung, wenn zwei der Tangentialspannungen τ_x, τ_y, τ_z = Null sind. Ist z. B.

$$\tau_y = \tau_z = 0,$$

so zerfällt Gleichung (III) in:

$$\sigma_x - \sigma = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \tau_x^2 = 0,$$

woraus folgt:

$$\sigma_1 = \sigma_x$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_2\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_y + \sigma_z \pm \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_x^2}}{2}.$$

Die erste Hauptspannung σ_1 fällt auch der Richtung nach mit σ_x, d. h. mit der x-Axe zusammen; die Richtungen von σ_2 und σ_3 in der yz-Ebene sind dann bestimmt durch den Winkel β_2, den σ_2 mit der y-Axe bildet und für welchen man nach Nr. 220 findet:

$$tg\beta_2 = \frac{\tau_x}{\sigma_2 - \sigma_z} = \frac{\sigma_2 - \sigma_y}{\tau_x} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2\tau_x} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2\tau_x}\right)^2}.$$

Die Hauptausdehnungen ergeben sich nach Gl. (V):

$$E\varepsilon_1 = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}$$

$$E\left(\begin{matrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{matrix}\right) = -\frac{1}{m}\sigma_x + \frac{m-1}{2m}(\sigma_y + \sigma_z) \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_x^2}.$$

A. Gerader stabförmiger Körper.

I. Allgemeines Problem.

232. — O sei ein Punkt der Mittellinie des Körpers, also der Schwerpunkt des betreffenden Querschnitts F. Er wird zum Anfangspunkte eines rechtwinkeligen Axensystems OX, OY, OZ genommen von solcher Lage, dass OX mit der ursprünglich geraden Mittellinie, die Ebene YZ mit dem ursprünglich ebenen Querschnitte F zusammenfällt, und zwar sollen die Axen OY und OZ in den Hauptaxen des Querschnitts liegen, dessen Trägheitsmomente

für die Axen	OX	OY	OZ
resp. mit	A	B	C

bezeichnet werden.

Wegen der Deformation des Körpers unter der Einwirkung der belastenden Kräfte erfordert indessen das Axensystem eine bestimmtere Fixirung nach Massgabe von Nr. 209, und zwar werde festgesetzt, dass, wenn im ursprünglichen Zustande P ein Punkt der y-Axe im Abstande dy von O, Q ein Punkt der z-Axe im Abstande dz von O ist, immer O der Anfangspunkt, P ein Punkt der y-Axe und Q ein Punkt der yz-Ebene sein soll, wie auch diese materiellen Punkte O, P, Q verrückt werden mögen. Diese Art der Fixirung des Axensystems gegen den seiner Form nach ver-

änderlichen Körper wird dadurch ausgedrückt, dass für den Anfangspunkt, d. h. für

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

gesetzt wird:

$$\xi = 0 \qquad \eta = 0 \qquad \zeta = 0$$

$$\frac{d\xi}{dy} = 0 \qquad \frac{d\zeta}{dy} = 0$$

$$\frac{d\xi}{dz} = 0.$$

Unter den äusseren Kräften für den Querschnitt YZ werden alle diejenigen verstanden, welche den von diesem Querschnitte an gerechnet auf der Seite der positiven x-Axe gelegenen Theil des stabförmigen Körpers angreifen; es seien

$$R_x \qquad R_y \qquad R_z$$

die Componentensummen dieser Kräfte, algebraisch verstanden, so dass positive Werthe den Richtungen OX, OY, OZ, negative den entgegengesetzten Richtungen entsprechen, und

$$M_x \qquad M_y \qquad M_z$$

die Momentensummen in Beziehung auf die Axen, in der Weise algebraisch verstanden, dass positive Werthe den Drehungsrichtungen YZ, ZX, XY entsprechen.

Wenn nun noch Form und Grösse F des Querschnitts YZ gegeben sind, so besteht die Aufgabe zunächst darin, die Spannungen zu ermitteln, welche in den verschiedenen Punkten des Querschnitts hervorgerufen werden.

233. — Offenbar ist die Aufgabe, in dieser Allgemeinheit ausgesprochen, noch nicht bestimmt. Vor Allem könnten, sofern nur der einzelne Querschnitt und die durch die 6 Grössen R und M charakterisirten äusseren Einwirkungen gegeben wären, dadurch, wenn überhaupt, jedenfalls nur diejenigen Spannungen: $\sigma_x \quad \tau_y \quad \tau_z$

bestimmt sein, welche sich auf die Flächenelemente dieses Querschnitts selbst als Spannungsebenen beziehen, während die Spannungen

$$\sigma_y \qquad \sigma_z \qquad \tau_x$$

unbestimmt blieben, und es ist also nöthig, ein gewisses Stück des Körpers zu betrachten, welches sich vom Querschnitte YZ bis zu einem um $OO_1 = l$ im Sinne der positiven x-Axe von jenem entfernten Querschnitte erstrecken möge. Die Form dieses Körperstücks, welche vollständig gegeben sein muss, sei cylindrisch, also der Querschnitt constant; für einen veränderlichen Querschnitt gelten dann die Resultate der folgenden Untersuchung nur näherungsweise und unter der Voraussetzung, dass $OO_1 = l$ unendlich klein ist.

Denkt man den Körper durch den Querschnitt F_1 bei O_1 zerschnitten und an der so entstandenen Endfläche des betrachteten Körperstücks OO_1

die Kräfte $R'_x \quad R'_y \quad R'_z$

und Kräftepaare $M'_x \quad M'_y \quad M'_z$

angebracht, worauf sich die jenseits des Querschnitts F_1 angreifenden äusseren Kräfte reduciren lassen, wenn sie an den Punkt O_1 versetzt werden, so ist dadurch der Gleichgewichtszustand des betrachteten Körperstücks immer noch nicht bestimmt, weil es unendlich viele Systeme von äusseren Kräften, in den Elementen der Endfläche F_1 angreifend, giebt, die sich auf

die Kräfte R'_x R'_y R'_z am Punkte O_1

und die Kräftepaare M'_x M'_y M'_z

reduciren lassen, desgl. unendlich viele Systeme äusserer Kräfte, an den Elementen der cylindrischen Oberfläche und an den Massenelementen im Inneren des betrachteten Körperstücks angreifend, welche zusammen mit den 3 Kräften R' und 3 Kräftepaaren M' sich auf

die Kräfte R_x R_y R_z im Punkte O

und die Kräftepaare M_x M_y M_z

reduciren lassen, und weil jedem besonderen solchen Kräftesysteme auch ein besonderer Gleichgewichtszustand des betrachteten Körperstücks entsprechen muss.

Abgesehen davon indessen, dass bei solcher Specialisirung des Systems der äusseren Kräfte die wünschenswerthe Allgemeinheit der Lösung verloren ginge, ist man auch bisher kaum in irgend einem Falle überhaupt im Stande gewesen, die Probleme der Elasticitätslehre in solchem Sinne streng durchzuführen; man sieht sich vielmehr genöthigt, die Aufgabe umzukehren: eine gewisse Art des Gleichgewichtszustandes vorauszusetzen und die äusseren Kräfte zu bestimmen, welche denselben herbeiführen würden, um daraus schliesslich die freilich nur mehr oder weniger angenähert richtige Folgerung zu ziehen, dass ein System von Kräften, welches dem gefundenen bezüglich der Wirkung an dem starren Körper äquivalent wäre, den vorausgesetzten Gleichgewichtszustand des elastischen Körpers zur Folge haben werde.

234. — Entsprechend den Annahmen, welche den Untersuchungen über stabförmige Körper in den vorhergehenden Capiteln zu Grunde liegen, werde nun auch hier ein solcher Gleichgewichtszustand des betrachteten Körperstücks vorausgesetzt, dass in allen Punkten desselben

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = 0$$

ist, dass also die fadenförmigen Elemente von der Länge l und vom Querschnitte $dydz$, woraus man das Körperstück bestehend denken kann, keinerlei Zug oder Druck aufeinander ausüben, noch auch eine Verschiebung, d. h. eine Aenderung der vollkommen rechteckigen Beschaffenheit ihrer Querschnitte erleiden.*)

*) Das Problem, betreffend die Bestimmung derjenigen äusseren Kräfte, welche einen solchen Gleichgewichtszustand zur Folge haben, ist in voller Allgemeinheit von de Saint-

Damit dies möglich sei, dürfen weder auf die cylindrische Oberfläche noch auf die Massenelemente im Inneren Kräfte wirken, welche senkrecht zur x-Axe gerichtet sind; hier soll aber die noch weiter gehende Voraussetzung gemacht werden, dass überhaupt keine Kräfte auf die cylindrische Oberfläche, noch auf das Innere des betrachteten Körperstücks nach irgend einer Richtung wirken, wodurch insbesondere auch von der eigenen Schwere abstrahirt wird und die äusseren Kräfte auf diejenigen reducirt werden, welche in der Endfläche F_1 angreifen.

Entsprechend der Voraussetzung:

$\sigma_y = \sigma_z = 0$ ist nun: $\frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{1}{m}\frac{d\xi}{dx}$ . . . . . (1)

und entsprechend $\tau_x = 0$: $\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = 0$ . . . . (2),

während man nach den Gleichungen (VI) mit Rücksicht auf (1) hat:

$$\sigma_x = 2G\frac{m+1}{m}\frac{d\xi}{dx} = E\frac{d\xi}{dx}$$

$$\tau_y = G\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)$$

$$\tau_z = G\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right).$$

Die Einführung dieser Ausdrücke in die Gleichungen (I) zusammen mit

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = X = Y = Z = 0$$

liefert mit Berücksichtigung der Relation (1):

$$2\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} = 0 \quad . . . . . (3)$$

$$\frac{d^2\xi}{dx\,dy} + \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0 \quad . . . . . (4)$$

$$\frac{d^2\xi}{dx\,dz} + \frac{d^2\zeta}{dx^2} = 0 \quad . . . . . (5).$$

Zu diesen Gleichungen (1) bis (5), welche in jedem Punkte erfüllt sein müssen, kommen zur Bestimmung der Functionen ξ, η, ζ, wodurch dann auch die gesuchten Spannungen σ_x, τ_y und τ_z bestimmt sind, noch die Grenzbedingungen, und zwar erstens diejenigen, welche die Lage der Coordinatenaxen gegen den Körper charakterisiren (Nr. 232) und welche mit Rücksicht auf Gl. (2) dahin erweitert werden können, dass im Anfangspunkte, also für $x = y = z = 0$ sein muss:

$$\xi = \eta = \zeta = \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\xi}{dz} = \frac{d\eta}{dz} = \frac{d\zeta}{dy} = 0 \quad . . . . (6),$$

Vénant behandelt worden. Die folgende Darstellung schliesst sich in der Hauptsache der von Clebsch (Theorie der Elasticität fester Körper) dem Problem zu Theil gewordenen Behandlungsweise an.

und zweitens die Gleichungen (II), welche für jeden Punkt der cylindrischen Oberfläche erfüllt sein müssen, wenn man darin $p = 0$ setzt. Mit $\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = 0$ und $\cos\alpha = 0$, entsprechend der zur x-Axe senkrechten Richtung jeder Normalen der cylindrischen Oberfläche, werden aber die beiden letzten der 3 Gleichungen (II) identisch, während die erste wegen $\cos\gamma = \sin\beta$*) die Oberflächenbedingung:

$$\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)\cos\beta + \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)\sin\beta = 0 \quad \ldots \ldots (7)$$

liefert.

235. — Durch die Combination der Gleichungen (1) bis (5) in voriger Nr. erhält man:

$$\frac{d^3\xi}{dx^3} = 0; \quad \frac{d^3\xi}{dx\,dy\,dz} = 0; \quad \frac{d^3\xi}{dx\,dy^2} = 0; \quad \frac{d^3\xi}{dx\,dz^2} = 0 \text{**)}$$

$$\text{oder } \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right) = \frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right) = \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right) = \frac{d^2}{dy\,dz}\left(\frac{d\xi}{dx}\right) = 0,$$

welchen Gleichungen dadurch genügt werden kann, dass $\frac{d\xi}{dx}$ = einer ganzen Function von x, y, z gesetzt wird, die jede einzelne dieser Veränderlichen höchstens in der ersten Potenz enthält, während auch ein Glied mit dem Produkte yz nicht vorkommt. Die allgemeine Form einer solchen Function ist:

$$\frac{d\xi}{dx} = a + a_1 y + a_2 z + x(b + b_1 y + b_2 z),$$

woraus nach Gl. (1) folgt:

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{1}{m}(a + a_1 y + a_2 z) - \frac{x}{m}(b + b_1 y + b_2 z)$$

und durch Integration resp. nach x, y, z:

$$\xi = x(a + a_1 y + a_2 z) + \frac{x^2}{2}(b + b_1 y + b_2 z) + f(y,z)$$

---

*) Während in den allgemeinen Gleichungen (II) die Winkel α, β, γ nur von 0 bis π gerechnet sind, setzt die Ersetzung von γ durch β vermittels der Relation $\cos\gamma = \sin\beta$ voraus, dass der Winkel β jetzt parallel der Ebene YZ im Sinne von der positiven y-Axe durch den rechten Winkel zur positiven z-Axe von 0 bis 2π gerechnet werde.

**) Die erste dieser Gleichungen ergiebt sich, wenn unter den Ziffern die damit bezeichneten Gleichungen der vorigen Nr. verstanden werden, aus der Combination:

$$\frac{d(3)}{dx} - \frac{d(4)}{dy} - \frac{d(5)}{dz}$$

mit Rücksicht auf Gl. (1); die zweite aus der Combination:

$$\frac{d(4)}{dz} + \frac{d(5)}{dy}$$

mit Rücksicht auf Gl. (2); die beiden letzten endlich aus:

$$\frac{d(3)}{dx} \text{ und } \frac{d(4)}{dy} - \frac{d(5)}{dz}$$

mit Rücksicht auf (1) und auf die schon gefundene Gleichung: $\frac{d^3\xi}{dx^3} = 0$.

$$\eta = -\frac{1}{m}\left(ay + a_1\frac{y^2}{2} + a_2 yz\right) - \frac{x}{m}\left(by + b_1\frac{y^2}{2} + b_2 yz\right) + \varphi(x,z)$$
$$\zeta = -\frac{1}{m}\left(az + a_1 yz + a_2\frac{z^2}{2}\right) - \frac{x}{m}\left(bz + b_1 yz + b_2\frac{z^2}{2}\right) + \psi(x,y).$$

Vollständig entsprechen diese Gleichungen vorläufig nur der ersten der 7 Gleichungen in Nr. 234, und es bleiben die Functionen f, φ, ψ noch den übrigen gemäss zu bestimmen.

236. — Abgesehen zunächst von den Grenzbedingungen müssen die Functionen φ und ψ in den Ausdrücken von η und ζ den Gleichungen (2), (4) und (5) in Nr. 234 entsprechend gemacht werden. Aus (4) und (5) folgt aber mit Rücksicht auf den Ausdruck von $\frac{d\xi}{dx}$ in voriger Nr.:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{d}{dy}\left(\frac{d\xi}{dx}\right) = -a_1 - b_1 x$$
$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{d\xi}{dx}\right) = -a_2 - b_2 x,$$

also
$$\eta = \varphi_1(y,z) + x\,.\,\varphi_2(y,z) - a_1\frac{x^2}{2} - b_1\frac{x^3}{6}$$
$$\zeta = \psi_1(y,z) + x\,.\,\psi_2(y,z) - a_2\frac{x^2}{2} - b_2\frac{x^3}{6}.$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke von η und ζ mit den in Nr. 235 erhaltenen lehrt, dass die Functionen φ_1 und φ_2 kein y, ψ_1 und ψ_2 kein z enthalten können, und dass mithin zu setzen ist:

$$\eta = -\frac{1}{m}\left(ay + a_1\frac{y^2}{2} + a_2 yz\right) - \frac{x}{m}\left(by + b_1\frac{y^2}{2} + b_2 yz\right)$$
$$+ \varphi_1(z) + x\,.\,\varphi_2(z) - a_1\frac{x^2}{2} - b_1\frac{x^3}{6}$$
$$\zeta = -\frac{1}{m}\left(az + a_1 yz + a_2\frac{z^2}{2}\right) - \frac{x}{m}\left(bz + b_1 yz + b_2\frac{z^2}{2}\right)$$
$$+ \psi_1(y) + x\,.\,\psi_2(y) - a_2\frac{x^2}{2} - b_2\frac{x^3}{6}.$$

Durch die Einführung dieser Ausdrücke, welche vorläufig erst den Gleichungen (1), (4) und (5) genügen, in die Gleichung (2) erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{a_2}{m}y - x\frac{b_2}{m}y + \varphi'_1(z) + x\,.\,\varphi'_2(z) \\ -\frac{a_1}{m}z - x\frac{b_1}{m}z + \psi'_1(y) + x\,.\,\psi'_2(y) \end{array}\right\} = 0,$$

also

$$\varphi'_1(z) = a_0 + \frac{a_1}{m}z \qquad \varphi'_2(z) = b_0 + \frac{b_1}{m}z$$
$$\psi'_1(y) = -a_0 + \frac{a_2}{m}y \qquad \psi'_2(y) = -b_0 + \frac{b_2}{m}y$$

$$\varphi_1(z) = a' + a_0 z + \frac{a_1}{m}\frac{z^2}{2} \qquad \varphi_2(z) = b' + b_0 z + \frac{b_1}{m}\frac{z^2}{2}$$
$$\psi_1(y) = a'' - a_0 y + \frac{a_2}{m}\frac{y^2}{2} \qquad \psi_2(y) = b'' - b_0 y + \frac{b_2}{m}\frac{y^2}{2},$$

und damit endlich:

$$\eta = -\frac{1}{m}\left(ay + a_1\frac{y^2-z^2}{2} + a_2 yz\right) - \frac{x}{m}\left(by + b_1\frac{y^2-z^2}{2} + b_2 yz\right)$$
$$+ a' + a_0 z + x(b' + b_0 z) - a_1\frac{x^2}{2} - b_1\frac{x^3}{6}$$
$$\zeta = -\frac{1}{m}\left(az + a_1 yz + a_2\frac{z^2-y^2}{2}\right) - \frac{x}{m}\left(bz + b_1 yz + b_2\frac{z^2-y^2}{2}\right)$$
$$+ a'' - a_0 y + x(b'' - b_0 y) - a_2\frac{x^2}{2} - b_2\frac{x^3}{6}.$$

Die Function $f(y,z)$ im Ausdrucke von ξ (Nr. 235) muss nur der Gleichung (3) in Nr. 234 entsprechen, welche dafür die Bestimmungsgleichung:

$$2(b + b_1 y + b_2 z) + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} = 0$$

liefert; dieselbe wird einfacher, wenn

$$f(y,z) = -b\frac{y^2+z^2}{2} - b_1 yz^2 - b_2 y^2 z + F(y,z),$$

also
$$\xi = x(a + a_1 y + a_2 z) + \frac{x^2}{2}(b + b_1 y + b_2 z) -$$
$$-b\frac{y^2+z^2}{2} - b_1 yz^2 - b_2 y^2 z + F(y,z)$$

gesetzt wird. Dann ist nämlich die Function $F(y,z)$ an die Gleichung gebunden:

$$\frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{d^2 F}{dz^2} = 0.$$

237. — Durch die Grenzbedingungen wird die Function $F(y,z)$ näher bestimmt, sowie auch die in den Ausdrücken von ξ, η, ζ vorkommenden Constanten

$$\begin{matrix} a & a_1 & a_2 & a_0 & a' & a'' \\ b & b_1 & b_2 & b_0 & b' & b'' \end{matrix}$$

dadurch auf eine geringere Zahl reducirt werden.

Zunächst folgt aus den Bedingungen (6) sub Nr. 234:

$$a' = 0; \qquad a'' = 0; \qquad a_0 = 0$$
$$F_0 = 0; \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 = 0; \left(\frac{dF}{dz}\right)_0 = 0,$$

wobei der Zeiger o den Werth der betreffenden Function für den Anfangspunkt der Coordinaten bezeichnet, oder vielmehr für $y = z = 0$, da x in der Function nicht vorkommt.

Die Oberflächenbedingung (7) in Nr. 234 erhält eine einfachere Form, wenn
$$F(y,z) = Q - b'y - b''z$$

gesetzt wird, unter Q eine neue Function von y und z verstanden, welche der Differentialgleichung

$$\frac{d^2Q}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dz^2} = 0$$

entspricht und die Eigenschaft hat, für $y = z = 0$ zu verschwinden, während die obigen Gleichungen

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)_0 = 0 \text{ und } \left(\frac{dF}{dz}\right)_0 = 0$$

jetzt ersetzt werden durch:

$$b' = \left(\frac{dQ}{dy}\right)_0; \; b'' = \left(\frac{dQ}{dz}\right)_0.$$

Die zur näheren Bestimmung von Q dienende Gleichung (7) aber wird:

$$\left(b_0 z - b\,\frac{m+1}{m}\,y - b_1\,\frac{y^2 + (2m-1)\,z^2}{2m} - b_2\,\frac{2m+1}{m}\,yz + \frac{dQ}{dy}\right)\cos\beta +$$
$$+\left(-b_0 y - b\,\frac{m+1}{m}\,z - b_1\,\frac{2m+1}{m}\,yz - b_2\,\frac{z^2 + (2m-1)\,y^2}{2m} + \frac{dQ}{dz}\right)\sin\beta = 0.$$

238. — Den Bedingungen für die Function Q kann dadurch entsprochen werden, dass gesetzt wird:

$$Q = bq + b_0 Q_0 + b_1 Q_1 + b_2 Q_2,$$

unter q, Q_0, Q_1 und Q_2 Functionen von y und z verstanden von solcher Art, dass dieser Ausdruck von Q allen jenen Bedingungen genügt, welche Werthe die Constanten b, b_0, b_1 und b_2 auch haben mögen, insbesondere also auch dann, wenn je 3 derselben = Null gesetzt werden. Diese Zerlegung der Function Q ist zunächst dadurch wichtig, dass sie den Werth der Constanten $b =$ Null ergiebt. In der That müsste, wenn $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ gesetzt wird, die Function q so beschaffen sein, dass für alle Werthe von y und z

$$\frac{d^2q}{dy^2} + \frac{d^2q}{dz^2} = 0$$

und für diejenigen Werthe von y und z, welche dem Umfange eines Querschnitts angehören,

$$\frac{dq}{dy}\cos\beta + \frac{dq}{dz}\sin\beta = \frac{m+1}{m}\,(y\cos\beta + z\sin\beta)$$

ist, unter β den Winkel der Normale dieses Umfangs mit der y-Axe verstanden; allein es lässt sich zeigen, dass diese beiden Gleichungen einander widersprechen, dass also q unmöglich ist, mithin $b = 0$ gesetzt werden muss.

Es bleibt sonach nur übrig:

$$Q = b_0 Q_0 + b_1 Q_1 + b_2 Q_2,$$

unter Q_0, Q_1 und Q_2 Functionen von y und z verstanden, welche für $y = z = 0$ verschwinden, welche ferner für alle Werthe von y und z den Gleichungen:

$$\frac{d^2 Q_0}{dy^2} + \frac{d^2 Q_0}{dz^2} = 0$$
$$\frac{d^2 Q_1}{dy^2} + \frac{d^2 Q_1}{dz^2} = 0$$
$$\frac{d^2 Q_2}{dy^2} + \frac{d^2 Q_2}{dz^2} = 0$$

und insbesondere für den Umfang des Querschnitts den Gleichungen:

$$\frac{dQ_0}{dy} \cos\beta + \frac{dQ_0}{dz} \sin\beta = y \sin\beta - z \cos\beta$$
$$\frac{dQ_1}{dy} \cos\beta + \frac{dQ_1}{dz} \sin\beta = \frac{y^2 + (2m-1) z^2}{2m} \cos\beta + \frac{2m+1}{m} yz \sin\beta$$
$$\frac{dQ_2}{dy} \cos\beta + \frac{dQ_2}{dz} \sin\beta = \frac{z^2 + (2m-1) y^2}{2m} \sin\beta + \frac{2m+1}{m} yz \cos\beta$$

entsprechen und dadurch wesentlich von der Form des Querschnitts abhängig sind.

239. — Die Einführung der in den beiden vorigen Nummern erhaltenen Werthe:

$$a' = a'' = a_0 = b = 0$$
$$F(y, z) = Q - b'y - b''z$$
$$b' = \left(\frac{dQ}{dy}\right)_0 ; \; b'' = \left(\frac{dQ}{dz}\right)_0 .$$

in die für ξ, η, ζ sub Nr. 236 gewonnenen Ausdrücke liefert:

$$\xi = x(a + a_1 y + a_2 z) + b_1 y \left(\frac{x^2}{2} - z^2\right) + b_2 z \left(\frac{x^2}{2} - y^2\right) + $$
$$+ Q - y \left(\frac{dQ}{dy}\right)_0 - z \left(\frac{dQ}{dz}\right)_0$$

$$\eta = -a \frac{y}{m} - a_1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2 - z^2}{2m}\right) - a_2 \frac{yz}{m} + b_0 xz -$$
$$- b_1 x \left(\frac{x^2}{6} + \frac{y^2 - z^2}{2m}\right) - b_2 \frac{xyz}{m} + x \left(\frac{dQ}{dy}\right)_0$$

$$\zeta = -a \frac{z}{m} - a_1 \frac{yz}{m} - a_2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{z^2 - y^2}{2m}\right) - b_0 xy$$
$$- b_1 \frac{xyz}{m} - b_2 x \left(\frac{x^2}{6} + \frac{z^2 - y^2}{2m}\right) + x \left(\frac{dQ}{dz}\right)_0$$

und endlich damit nach den Gleichungen (Nr. 234):

$$\sigma_x = E \frac{d\xi}{dx}; \; \tau_y = G \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right); \; \tau_z = G \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)$$

die Spannungen in einem beliebigen Punkte des betrachteten Körperstücks:

$$\frac{1}{E} \sigma_x = a + a_1 y + a_2 z + x (b_1 y + b_2 z)$$
$$\frac{1}{G} \tau_y = - b_0 y - b_1 \frac{2m+1}{m} yz - b_2 \frac{z^2 + (2m-1) y^2}{2m} + \frac{dQ}{dz}$$
$$\frac{1}{G} \tau_z = b_0 z - b_1 \frac{y^2 + (2m-1) z^2}{2m} - b_2 \frac{2m+1}{m} yz + \frac{dQ}{dy} .$$

Die Spannungen für einen beliebigen Punkt des Anfangsquerschnitts YZ ergeben sich daraus mit $x = 0$, wodurch aber nur σ_x einen besonderen Werth annimmt, während τ_y und τ_z in entsprechenden Punkten aller Querschnitte des betrachteten Körperstücks gleich sind.

240. — Das Stattfinden des vorausgesetzten Gleichgewichtszustandes erfordert nun streng genommen, dass in den Flächenelementen der Endfläche F_1 des betrachteten Körperstücks $OO_1 = l$ solche äussere Kräfte wirken, welche sich durch Multiplication von $dydz$ mit den obigen Werthen von σ_x, τ_y und τ_z für $x = l$ ergeben. Ist aber das System der äusseren Kräfte für den Querschnitt YZ nach Nr. 232 nur durch

$$R_x \quad R_y \quad R_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z$$

gegeben, so lassen sich näherungsweise die Spannungen im Querschnitte YZ nach Nr. 233 den obigen für $x = 0$ gleich setzen, falls nur die übrig gebliebenen 6 Constanten

$$a \quad a_1 \quad a_2 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2$$

so bestimmt werden, dass

$$R_x = \int \sigma_x \, . \, dF \qquad R_y = \int \tau_z \, . \, dF \qquad R_z = \int \tau_y \, . \, dF$$

$$M_x = \int (y\tau_y - z\tau_z) \, dF; \quad M_y = \int z\sigma_x \, . \, dF; \quad - M_z = \int y\sigma_x \, . \, dF$$

ist, die Integrale über den ganzen Querschnitt F ausgedehnt gedacht. Diese Gleichungen reichen zur fraglichen Bestimmung gerade aus und geben mit Rücksicht darauf, dass nach den Annahmen und Bezeichnungen in Nr. 232

$$\int y dF = \int z \, dF = \int yz \, dF = 0$$

$$B = \int z^2 dF; \quad C = \int y^2 dF; \quad A = B + C$$

ist:

$$a = \frac{R_x}{EF}; \quad a_1 = \frac{-M_z}{EC}; \quad a_2 = \frac{M_y}{EB}$$

sowie für b_0, b_1 und b_2 die Gleichungen:

$$\frac{R_y}{G} = - b_1 \frac{C + (2m - 1) B}{2m} + \int \frac{dQ}{dy} dF$$

$$\frac{R_z}{G} = - b_2 \frac{B + (2m - 1) C}{2m} + \int \frac{dQ}{dz} dF$$

$$\frac{M_x}{G} = - b_0 A - b_1 \int \frac{(4m + 1) y^2 - (2m - 1) z^2}{2m} z \, dF$$

$$+ b_2 \int \frac{(4m + 1) z^2 - (2m - 1) y^2}{2m} y \, dF + \int \left(y \frac{dQ}{dz} - z \frac{dQ}{dy} \right) dF.$$

241. — Die Constanten b_0, b_1 und b_2 erscheinen hiernach als abhängig von den Functionen Q_0, Q_1 und Q_2, auf welche die Function

$$Q = b_0 Q_0 + b_1 Q_1 + b_2 Q_2 \text{ (Nr. 238)}$$

zurückgeführt wurde; indessen ist es ein bemerkenswerther Umstand, dass, wenn auch diese Functionen selbst nur für bestimmte Querschnittsformen bestimmbar sind, doch die beiden Integrale

$$\int \frac{dQ}{dy} dF \text{ und} \int \frac{dQ}{dz} dF$$

und damit auch die Constanten b_1 und b_2 allgemein ausgedrückt werden können. Auf Grund der Bedingungen, denen die Function Q unterworfen ist (Nr. 237), findet man nämlich mit Hülfe eines gewissen Verfahrens der theilweisen Integration:

$$\int \frac{dQ}{dy} dF = \int \left(\frac{d(yY)}{dy} + \frac{d(yZ)}{dz} \right) dF$$

$$\int \frac{dQ}{dz} dF = \int \left(\frac{d(zZ)}{dz} + \frac{d(zY)}{dy} \right) dF,$$

worin

$$Y = -b_0 z + b_1 \frac{y^2 + (2m-1) z^2}{2m} + b_2 \frac{2m+1}{m} yz$$

$$Z = b_0 y + b_1 \frac{2m+1}{m} yz + b_2 \frac{z^2 + (2m-1) y^2}{2m}$$

ist. Die Einführung dieser Werthe liefert dann mit:

$$\int y\, dF = \int z\, dF = \int yz\, dF = 0; \quad B = \int z^2 dF; \quad C = \int y^2 dF$$

$$\int \frac{dQ}{dy} dF = b_1 \frac{(4m+5)\, C + (2m-1)\, B}{2m}$$

$$\int \frac{dQ}{dz} dF = b_2 \frac{(4m+5)\, B + (2m-1)\, C}{2m},$$

folglich nach Nr. 240:

$$b_1 = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_y}{GC} = \frac{R_y}{EC}; \quad b_2 = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_z}{GB} = \frac{R_z}{EB}.$$

Somit lässt sich nur die Constante b_0 nicht ohne Specialisirung der Querschnittsform allgemein ausdrücken; zudem ist es bemerkenswerth, dass, während

die Constanten $a \quad a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2$
nur resp. von $R_x \quad M_z \quad M_y \quad R_y \quad R_z$

abhängen, die Constante b_0 dagegen im Allgemeinen nicht nur von M_x, sondern zugleich von b_1 und b_2, also von R_y und R_z abhängig ist.

242. — Die Einführung der in den beiden vorigen Nummern gefundenen Werthe der Constanten

$$a \quad a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2$$

in die Ausdrücke von σ_x, τ_y und τ_z für $x = 0$, d. h. für den Querschnitt YZ liefert mit Rücksicht auf

$$Q = b_0 Q_0 + b_1 Q_1 + b_2 Q_2$$

$$\sigma_x = \frac{R_x}{F} + \frac{M_y}{B} z - \frac{M_z}{C} y$$

$$\tau_y = G b_0 \left(\frac{dQ_0}{dz} - y \right) + \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_y}{C} \left(\frac{dQ_1}{dz} - \frac{2m+1}{m} yz \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_z}{B} \left(\frac{dQ_2}{dz} - \frac{z^2 + (2m-1) y^2}{2m} \right)$$

$$\tau_z = G b_0 \left(\frac{dQ_0}{dy} + z\right) + \frac{1}{2}\frac{m}{m+1}\frac{R_y}{C}\left(\frac{dQ_1}{dy} - \frac{y^2 + (2m-1)z^2}{2m}\right) + \\ + \frac{1}{2}\frac{m}{m+1}\frac{R_z}{B}\left(\frac{dQ_2}{dy} - \frac{2m+1}{m}\, yz\right).$$

Dabei ist:

$$G b_0 = \frac{-M_x - \frac{1}{2}\frac{m}{m+1}\frac{R_y}{C}\left[J_1 - \int\left(y\frac{dQ_1}{dz} - z\frac{dQ_1}{dy}\right)dF\right] + \frac{1}{2}\frac{m}{m+1}\frac{R_z}{B}\left[J_2 + \int\left(y\frac{dQ_2}{dz} - z\frac{dQ_2}{dy}\right)dF\right]}{A - \int\left(y\frac{dQ_0}{dz} - z\frac{dQ_0}{dy}\right)dF}$$

$$J_1 = \int \frac{(4m+1)\,y^2 - (2m-1)\,z^2}{2m}\, z\, dF$$

$$J_2 = \int \frac{(4m+1)\,z^2 - (2m-1)\,y^2}{2m}\, z\, dF.$$

Der allgemeine Charakter dieser Formeln besteht darin, dass die resultirenden Spannungen in irgend einem Punkte des Querschnitts die Summen derjenigen Spannungen gleicher Art sind, welche von den Einzelwirkungen

$$R_x \quad R_y \quad R_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z$$

herrühren; ebenso verhält es sich mit den Verrückungen ξ, η, ζ, welche nach Nr. 239 lineare Functionen der Constanten

$$a \quad a_1 \quad a_2 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2$$

und somit auch der Grössen R und M sind.

Die Normalspannung σ_x hängt nur von

$$R_x, \quad M_y \quad \text{und} \quad M_z$$

ab, und zwar von M_y und M_z in gleicher Weise; die Tangentialspannungen τ_y und τ_z hängen nur von

$$M_x, \quad R_y \text{ und } R_z$$

und zwar von R_y und R_z in gleicher Weise ab.

243. — In den meisten Fällen der Anwendung ist der Querschnitt in Beziehung auf eine der Schwerpunktshauptaxen OY und OZ oder in Beziehung auf beide symmetrisch.

Ist OZ Symmetrieaxe, so ist $\cos\beta$ eine ungerade, $\sin\beta$ eine gerade Function von y*); den Grenzbedingungen der Functionen Q_0, Q_1 und Q_2 (Nr. 238) ist es dann entsprechend, mit den allgemeinen Bedingungsgleichungen dieser Functionen aber nicht im Widerspruche,

Q_0 und Q_1 ungeraden Functionen,

Q_2 einer geraden Function von y

gleich zu setzen. Sofern nun, unter $f(y)$ eine ungerade Function von y verstanden, das Integral

$$\int f(y)\,.\,dF = 0$$

---

*) $f(y)$ ist eine gerade Function von y, wenn $f(-y) = f(y)$
„ ungerade „ „ , „ $f(-y) = -f(y)$
ist. Der Differentialquotient nach y ist im ersten Falle eine ungerade, im zweiten eine gerade Function von y.

ist, wenn es über den ganzen in Beziehung auf die z-Axe symmetrischen Querschnitt ausgedehnt wird, so verschwindet in diesem Falle das Glied mit R_z in dem Ausdrucke von b_0 (Nr. 242), und es wird also:

$$Gb_0 = \frac{-M_x - \frac{1}{2}\frac{m}{m+1}\frac{R_y}{C}\left[J_1 - \int\left(y\frac{dQ_1}{dz} - z\frac{dQ_1}{dy}\right)dF\right]}{A - \int\left(y\frac{dQ_0}{dz} - z\frac{dQ_0}{dy}\right)dF}.$$

Ist OY Symmetrieaxe, so ist $\cos\beta$ eine gerade, $\sin\beta$ eine ungera[de] Function von z;

Q_0 und Q_2 sind ungeraden Functionen,

Q_1 ist einer geraden Function von z

gleich zu setzen, und im Ausdrucke von b_0 verschwindet das Glied mit R[...]

Ist endlich der Querschnitt in Beziehung auf beide Schwe[r]punktshauptaxen symmetrisch, so ist

Q_0 ungerade für y und z,

Q_1 ungerade für y, gerade für z,

Q_2 gerade für y, ungerade für z

und die Constante b_0 ist dann nur noch von M_x abhängig, nämlich:

$$Gb_0 = \frac{-M_x}{A - \int\left(y\frac{dQ_0}{dz} - z\frac{dQ_0}{dy}\right)dF}.$$

244. — An der Lösung des allgemeinen Problems fehlt jetzt nur noch die Bestimmung der Functionen Q_0, Q_1 und Q_2. Zu dem Ende kann man bemerken, dass der gemeinschaftlichen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2} = 0,$$

welcher nach Nr. 238 diese Functionen entsprechen sollen, allgemein genügt wird durch die Function:

$$f(y, z) = \varphi\,(y + zi) + \psi\,(y - zi),$$

unter φ und ψ beliebige Functionen verstanden, während zur Abkürzung $\sqrt{-1} = i$ gesetzt ist. Ein particuläres Integral von algebraischer Form, welches zunächst wenigstens dem Falle entspricht, dass der Querschnitt durch irgend welche algebraische Linien begrenzt wird, ist:

$$f(y, z) = \Sigma\,\frac{\alpha + \frac{\beta}{i}}{2}\,(y + zi)^n + \Sigma\,\frac{\alpha - \frac{\beta}{i}}{2}\,(y - zi)^n,$$

wo unter den Summenzeichen alle Summanden begriffen sind, welche aus der allgemeinen Form durch die Substitutionen

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

hervorgehen. Werden dabei die entsprechenden Werthe der Constanten α und β mit

α und β, α_1 un[...] $\beta_3 \ldots$

bezeichnet, so liefert die Ent[...]

$$f(y,z) = \alpha + \alpha_1 y + \beta_1 z + \alpha_2 (y^2 - z^2) + \beta_2 . 2yz +$$
$$+ \alpha_3 (y^3 - 3yz^2) + \beta_3 (3y^2 z - z^3) +$$
$$+ \alpha_4 (y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) + \beta_4 (4y^3 z - 4yz^3) + \ldots,$$

eine Function, welche auch leicht nachträglich durch Ausführung der Differentiationen als der vorausgesetzten Differentialgleichung entsprechend verificirt werden kann.

Ist nun der Querschnitt von algebraischen Linien begrenzt, so dass wegen

$$\frac{sin\beta}{cos\beta} = -\frac{dy}{dz}$$

$cos\beta$ und $sin\beta$ ganzen algebraischen Functionen von y und z proportional sind, so können die Constanten

$$\alpha \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \ldots \quad \beta_1 \quad \beta_2 \ldots$$

den Grenzbedingungen (Nr. 238) entsprechend bestimmt werden; wegen der gemeinschaftlichen Eigenschaft der Functionen Q_0, Q_1 und Q_2, für $y = z = 0$ zu verschwinden, ist α immer $= 0$.

Wäre der Querschnitt von transcendenten Linien begrenzt, so könnte man dieselben näherungsweise durch algebraische ersetzen oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Proportionalwerthe von $cos\beta$ und $sin\beta$ in Reihen entwickeln, welche nach ganzen Potenzen von y und z fortschreiten, dabei aber die Glieder von einer gewissen Ordnung an vernachlässigen.

II. Besondere Fälle.

a. Einfache Fälle.

245. — Die einfachen Fälle sind diejenigen, in welchen von den 6 Grössen

$$R_x \quad R_y \quad R_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z$$

alle ausser einer = Null sind; nur 4 von diesen 6 Fällen sind wesentlich verschieden.

Ist 1) nur R_x nicht = Null, so wird nach Nr. 242:

$$\sigma_x = \frac{R_x}{F}\,; \; \tau_y = \tau_z = 0\,;$$

im ersten Capitel ist dieser Fall ausführlicher behandelt worden.

Ist 2) nur M_y oder M_z nicht = Null, so wird:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{B} z \text{ oder} = \frac{-M_z}{C} y\,; \quad \tau_y = \tau_z = 0$$

in Uebereinstimmung mit den Fundamentalgleichungen, welche den Untersuchungen des zweiten Capitels zu Grunde gelegt wurden.

246. — Ist 3) nur M_x nicht = Null, so ist nach Nr. 242:

$$\sigma_x = 0\,; \; \tau_y = Gb_0 \left(\frac{dQ_0}{dz} - y\right); \; \tau_z = Gb_0 \left(\frac{dQ_0}{dy} + z\right)$$

und bei Voraussetzung eines doppelt symmetrischen Querschnitts nach Nr. 243:

$$Gb_0 = \frac{-M_x}{A - \int\left(y\frac{dQ_0}{dz} - z\frac{dQ_0}{dy}\right)dF}.$$

Die Function Q_0 ist ungerade für y und z (Nr. 243), deshalb nach Nr. 244:

$$Q_0 = \alpha_1 y + \beta_1 z + 2\beta_2 yz + \alpha_3 y^3 - \beta_3 z^3 + 4\beta_4(y^3 z - yz^3) + \ldots$$

$$\frac{dQ_0}{dy} = \alpha_1 + 2\beta_2 z + 3\alpha_3 y^2 + 4\beta_4(3y^2 z - z^3) + \ldots$$

$$\frac{dQ_0}{dz} = \beta_1 + 2\beta_2 y - 3\beta_3 z^2 + 4\beta_4(y^3 - 3yz^2) + \ldots$$

und die in diesen Ausdrücken vorkommenden constanten Coefficienten sind dadurch bestimmt, dass nach Nr. 238 für jeden Punkt des Umfangs

$$\left(\frac{dQ_0}{dy} + z\right)\cos\beta + \left(\frac{dQ_0}{dz} - y\right)\sin\beta = 0$$

sein muss, eine Gleichung, welche auch geschrieben werden kann:

$$\frac{\tau_y}{\tau_z} = -\cot g\,\beta = \frac{dz}{dy}$$

und welche mithin ausdrückt, dass die resultirende Spannung τ in allen Punkten des Umfangs tangential an denselben gerichtet ist (cf. Nr. 191).

Die Resultate, zu denen man auf solche Weise gelangt, stimmen überein mit denen, welche im fünften Capitel sub **B.** von einem weniger allgemeinen Gesichtspunkte aus direct erhalten wurden.

247. — Für die Ellipse z. B. mit der Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = -\frac{dy}{dz} = \frac{b^2 z}{c^2 y}$, womit man findet:

$$Q_0 = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}yz = \frac{C - B}{C + B}yz;\quad Gb_0 = -\frac{B + C}{4BC}M_x$$

$$\tau_y = \frac{M_x}{2C}y;\quad \tau_z = -\frac{M_x}{2B}z$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 200. Wegen

$$\left(\frac{dQ_0}{dy}\right)_0 = \left(\frac{dQ_0}{dz}\right)_0 = 0$$

ist ferner nach Nr. 239:

$$\eta = b_0 xz;\quad \zeta = -b_0 xy,$$

also der specifische Drehungswinkel nach Nr. 202:

$$\vartheta = \left(\frac{d^2\zeta}{dx\,dy}\right)_{z=0} = -\left(\frac{d^2\eta}{dx\,dz}\right)_{y=0} = -b_0 = \frac{M_x}{\frac{4BC}{B+C}G}$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 204. Endlich ist nach Nr. 239 die Gleichung der windschiefen Querschnittsfläche:

$$\xi = b_0 Q_0 = -\vartheta Q_0 = \frac{B-C}{B+C}\vartheta . yz$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 205.

248. — Für das Rechteck mit den Seiten $2b$ (parallel der y-Axe) und $2c$ (parallel der z-Axe) ist in allen Punkten der Seiten $2c$ des Umfangs:

$$\cos\beta = \pm 1\,;\ \sin\beta = 0\,;\ y = \pm b,$$

womit die Grenzbedingung liefert:

$$\alpha_1 + 3b^2\alpha_3 = 0\,;\quad 2\beta_2 + 1 + 12b^2\beta_4 = 0\,;\quad \beta_4 = 0\,,$$

falls die Entwickelung der Function Q_0 nur bis zu den Gliedern von der 4ten Ordnung incl. fortgesetzt wird. In allen Punkten der Seiten $2b$ des Umfangs ist:

$$\cos\beta = 0\,;\ \sin\beta = \pm 1\,;\ z = \pm c\,,$$

womit die Grenzbedingung giebt:

$$\beta_1 - 3c^2\beta_3 = 0;\quad 2\beta_2 - 1 - 12c^2\beta_4 = 0\,;\quad \beta_4 = 0.$$

Demgemäss kann $\alpha_1 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ gesetzt werden; was aber β_2 betrifft, so erhält man dafür 2 Werthe, die sich widersprechen, und es wird dieser Widerspruch auch dadurch nicht beseitigt, dass die Entwickelung der Function Q_0 bis zu einer grösseren, aber endlichen Zahl von Gliedern fortgesetzt wird. Wenn man aber in den Ausdrücken von $\frac{dQ_0}{dy}$ und $\frac{dQ_0}{dz}$ (Nr. 246) den Gliedern mit z^3 und y^3 Coefficienten beilegte, welche von β_4 verschieden sind, um dadurch möglicher Weise dem Einflusse der fortgelassenen folgenden Glieder Rechnung zu tragen, so ergeben sich diese Coefficienten $= 0$ und somit:

$$\frac{dQ_0}{dy} = 2\beta_2 z + 12\beta_4 y^2 z\ ;\quad \frac{dQ_0}{dz} = 2\beta_2 y - 12\beta_4 y z^2\ ,$$

wodurch der Gleichung:

$$\frac{d^2Q_0}{dy^2} + \frac{d^2Q_0}{dz^2} = 0$$

nicht widersprochen wird und sich ergiebt:

$$2\beta_2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\,;\quad 12\beta_4 = -\frac{2}{b^2 + c^2}.$$

Damit wird: $Gb_0 = -\frac{9}{32}\frac{b^2 + c^2}{b^3c^3}M_x$.

und in Uebereinstimmung mit Nr. 199:

$$\tau_y = \frac{9}{16}\frac{M_x}{b^3c}\,y\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\,;\quad \tau_z = -\frac{9}{16}\frac{M_x}{bc^3}\,z\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

ferner nach Nr. 239:

$$\eta = b_0 xz\,;\ \zeta = -b_0 xy,$$

sonach $\vartheta = -b_0 = \frac{9}{32}\frac{M_x}{G}\frac{b^2 + c^2}{b^3c^3}$ (cf. Nr. 204).

Wenn man endlich im Ausdrucke von Q_0 auch noch die Glieder von der 4ten Ordnung fortlässt, also

$$Q_0 = 2\beta_2 yz = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} yz = \frac{C - B}{C + B} yz$$

setzt, so ist nach Nr. 239:

$$\xi = b_0 Q_0 = -\vartheta Q_0 = \frac{B - C}{B + C} \vartheta . yz$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 205.

249. — Eine nähere Untersuchung erfordert der Fall, dass

4) nur R_y oder R_z nicht = Null

ist, nachdem in dem von der Schubelasticität handelnden vierten Capitel die Vertheilung der Tangentialspannungen im Querschnitte nur unter Abstraction von den zur Richtung der resultirenden Schubkraft R_y resp. R_z senkrechten Spannungen τ_y resp. τ_z und auf Grund der Annahme untersucht worden ist, dass die einzig berücksichtigten, nach R_y resp. R_z gerichteten Spannungen τ_z resp. τ_y blosse Functionen von y resp. z seien.

Es sei insbesondere R_z allein nicht = Null, und es werde angenommen, dass zugleich die Hauptaxe OZ den Querschnitt symmetrisch theilt. Nach Nr. 243 ist dann $b_0 = 0$ und deshalb nach Nr. 242:

$$\tau_y = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_z}{B} \left(\frac{dQ_2}{dz} - \frac{z^2 + (2m-1) y^2}{2m} \right)$$

$$\tau_z = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_z}{B} \left(\frac{dQ_2}{dy} - \frac{2m+1}{m} yz \right).$$

Nach Nr. 243 ist Q_2 eine gerade Function von y und deshalb nach Nr. 244:

$$Q_2 = \beta_1 z + \alpha_2 (y^2 - z^2) + \beta_3 (3y^2 z - z^3) + \alpha_4 (y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) + \ldots$$

$$\frac{dQ_2}{dy} = 2\alpha_2 y + 6\beta_3 yz + 4\alpha_4 (y^3 - 3yz^2) + \ldots$$

$$\frac{dQ_2}{dz} = \beta_1 - 2\alpha_2 z + 3\beta_3 (y^2 - z^2) + 4\alpha_4 (-3y^2 z + z^3) + \ldots,$$

wobei die Constanten α und β bestimmt sind durch die Grenzbedingung (cf. Nr. 238):

$$\left(\frac{dQ_2}{dy} - \frac{2m+1}{m} yz \right) \cos\beta + \left(\frac{dQ_2}{dz} - \frac{z^2 + (2m-1) y^2}{2m} \right) \sin\beta = 0,$$

welche ausdrückt, dass die resultirende Tangentialspannung $\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$ in allen Punkten des Umfangs nach der Tangente desselben gerichtet sein muss.

Als Gleichung der gekrümmten Querschnittsfläche erhält man aus dem Ausdrucke von ξ in Nr. 239 mit $x = 0$ und $Q = b_2 Q_2$:

$$\xi = b_2 \left[-y^2 z + Q_2 - y \left(\frac{dQ_2}{dy} \right)_0 - z \left(\frac{dQ_2}{dz} \right)_0 \right]$$

$$= \frac{R_z}{EB} (-y^2 z + Q_2 - \beta_1 z).$$

Diese Fläche wird nicht nur von Ebenen, welche der xz-Ebene, sondern im Allgemeinen auch von solchen, welche der xy-Ebene parallel sind, in krummen Linien geschnitten.

Wenn auch die y-Axe den Querschnitt symmetrisch theilt, so ist Q_2 eine ungerade Function von z (cf. Nr. 243), also:

$$Q_2 = \beta_1 z + \beta_3 (3y^2 z - z^3) + \dots$$

$$\frac{dQ_2}{dy} = 6\beta_3 yz + \dots; \quad \frac{dQ_2}{dz} = \beta_1 + 3\beta_3 (y^2 - z^2) + \dots$$

$$\xi = \frac{R_z}{EB} [-y^2 z + \beta_3 (3y^2 z - z^3) + \dots].$$

250. — Für einen elliptischen Querschnitt mit der Umfangsgleichung:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

findet man, wenn

$$\frac{b^2 + 2\frac{m+1}{m}c^2}{b^2 + 3c^2} = \alpha$$

gesetzt wird,

$$\beta_1 = \alpha c^2; \quad 3\beta_3 = \alpha - \frac{1}{2m};$$

alle übrigen Coefficienten von $Q_2 =$ Null; damit:

$$\tau_y = \frac{1}{2}\frac{m}{m+1}\frac{R_z}{B}[\alpha(c^2 - z^2) - (1-\alpha)y^2]$$

$$\tau_z = -\frac{R_z}{B}\left(1 - \frac{m}{m+1}\alpha\right)yz.$$

Wenn insbesondere die Ellipse in einen Kreis übergeht, so ergiebt sich mit $b = c = r$ und wegen $B = F\frac{r^2}{4}$:

$$\tau_y = \frac{3m+2}{2m+2}\frac{R_z}{F}\left(1 - \frac{z^2}{r^2} - \frac{m-2}{3m+2}\frac{y_2}{r^2}\right)$$

$$\tau_z = -\frac{m+2}{m+1}\frac{R_z}{F}\frac{yz}{r^2}.$$

Die Werthe von τ_y und τ_z, sowie von $\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$, welche sich hiernach mit $m = 3$ für einige Punkte des Querschnitts (im Umfange und in der z-Axe) ergeben, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt zur Vergleichung mit denjenigen hier mit τ_1 bezeichneten Werthen von τ resp. τ_y, welche nach Nr. 173 denselben Werthen von z entsprechen würden.

	$\tau_y : \frac{R_z}{F}$		$-\tau_z : \frac{R_z}{F}$		$\tau : \frac{R_z}{F}$		$\tau_1 : \frac{R_z}{F}$
	$y=0$	$y=\sqrt{r^2-z^2}$	$y=0$	$y=\sqrt{r^2-z^2}$	$y=0$	$y=\sqrt{r^2-z^2}$	(Nr. 173)
$z=0$	1,375	1,25	0	0	1,375	1,25	1,333
$z=\frac{1}{4}r$	1,289	1,172	0	0,303	1,289	1,210	1,25
$z=\frac{1}{2}r$	1,031	0,937	0	0,541	1,031	1,082	1
$z=\frac{3}{4}r$	0,602	0,547	0	0,620	0,602	0,827	0,583
$z=r$	0	0	0	0	0	0	0

251. — Wenn man für einen rechteckigen Querschnitt mit den Seiten $2b$ parallel OY und $2c$ parallel OZ die Entwickelung der Function Q_2 auf die Glieder bis zur 4ten Ordnung incl. beschränkt (welche freilich wegen der Symmetrie bezüglich auf die y-Axe verschwinden: cf. Nr. 249), so findet man die Grenzbedingungen, welche die der y-Axe parallelen Seiten des Umfangs liefern, unverträglich mit denen, welche die anderen Seiten ergeben, und es wird dieser Widerspruch auch dadurch nicht gehoben, dass die Entwickelung von Q_2 bis zu einer grösseren, endlichen Zahl von Gliedern fortgesetzt wird. Beide Umfangsbedingungen lassen sich aber vereinigen, wenn im Ausdrucke von $\frac{dQ_2}{dz}$ (Nr. 249) dem Gliede mit y^2 ein von $3\beta_3$ verschiedener Coefficient beigelegt, nämlich

$$\frac{dQ_2}{dy} = 6\beta_3 yz\,; \quad \frac{dQ_2}{dz} = \beta_1 - 3\beta_3 z^2 + 3\beta_4 y^2$$

gesetzt wird, was unbeschadet der Gleichung:

$$\frac{d^2 Q_2}{dy^2} + \frac{d^2 Q_2}{dz^2} = 0$$

geschehen kann. Dann folgt:

$$\beta_1 = \frac{m+1}{m} c^2\,; \quad 3\beta_3 = \frac{2m+1}{2m}\,; \quad 3\beta_4 = \frac{2m-1}{2m}$$

und damit wegen $B = F\frac{c^2}{3}$:

$$\tau_y = \frac{3}{2}\frac{R_z}{F}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right); \quad \tau_z = 0$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 173.

252. — Der Ausdruck von τ in Nr. 172 ist im Allgemeinen nur ein Mittelwerth von τ_y für die verschiedenen Punkte einer zur Richtungslinie der Schubkraft R_z senkrechten Geraden des Querschnitts. Die Beispiele der beiden vorigen Nummern lassen aber erkennen, dass die Substitution dieses Mittelwerths τ für das veränderliche τ_y unter gleichzeitiger Vernachlässigung von τ_z mit einem um so kleineren Fehler verbunden ist,

je weniger die Tangenten des Umfangs in den Endpunkten der betreffenden zur z-Axe (zu R_z) senkrechten Geraden gegen die z-Axe geneigt sind und je weiter zugleich diese Gerade von der y-Axe entfernt ist, weil in der grössten Entfernung von der y-Axe sich alle Tangentialspannungen auf Null reduciren. Die Beibehaltung des in Nr. 172 ermittelten, für alle Querschnittsformen gültigen, angenäherten Vertheilungsgesetzes der durch eine Schubkraft R_z bedingten Tangentialspannungen im Querschnitte ist also besonders dann vom Gesichtspunkte des praktischen Bedürfnisses aus unbedenklich, wenn der Umfang des Querschnitts von der y-Axe aus nach beiden Seiten hin zunächst nahe parallel der z-Axe bleibt und nur in grösserer Entfernung von der y-Axe einen grösseren Winkel mit der z-Axe bildet, also dort, wo überhaupt die Tangentialspannungen kleiner werden und deswegen einen bestimmenden Einfluss auf den Maximalwerth der Ausdehnung ε, der aus der Verbindung mit etwa gleichzeitigen anderen Einwirkungen resultirt, in geringerem Grade ausüben.

Bei einem doppelt-Tförmigen Querschnitte (Fig. 5, Nr. 48) z. B. ist es ganz richtig, für den schmalen Mitteltheil die Tangentialspannung in allen Abständen z von der y-Axe (Biegungsaxe bei dem gleichzeitigen Vorhandensein eines Kraftmomentes M_y) nach Nr. 172 zu berechnen; nur bei der plötzlichen Verbreiterung des Querschnitts zu den beiden Flanschen würde dies fehlerhaft sein: hier muss eine wesentlich ungleiche Vertheilung von τ_y nach abnehmender Grösse von der z-Axe aus seitwärts eintreten und zugleich eine Seitenspannung τ_z hinzukommen, womit zugleich eine Krümmung der Flanschen nach der Seite hin verbunden ist. In der That aber wird hier auch — abgesehen von jener Tendenz zur seitlichen Verwerfung, der bei sehr breiten und dünnen Flanschen durch entsprechende Absteifungen entgegengewirkt werden kann — der Einfluss der Tangentialspannung ohne Bedeutung für die resultirende Anstrengung des Materials, welche vielmehr nur in der schmalen Mittelwand wesentlich dadurch bedingt wird.

b. Zusammengesetzte Fälle.

253. — Bei dem im Vorhergehenden (Nr. 232 u. ff.) untersuchten allgemeinen Problem war in jedem Punkte irgend eines Querschnitts des geraden stabförmigen Körpers

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = 0.$$

Wenn also mit σ der Absolutwerth der Normalspannung σ_x und mit $\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$ die resultirende Tangentialspannung bezeichnet wird, so sind die grössten Werthe ε' und ε'' der Ausdehnung und der Zusammendrückung in dem betreffenden Punkte nach Nr. 230 bestimmt durch:

$$E\varepsilon' = \pm \frac{m-1}{2m}\,\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$E\varepsilon'' = \mp \frac{m-1}{2m}\,\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, jenachdem σ eine Spannung im engeren Sinne oder eine Pressung bedeutet. Beide Werthe $E\varepsilon'$ und $E\varepsilon''$ ändern sich von Punkt zu Punkt, und es soll

$$max.\,(E\varepsilon') \overline{\overline{<}}\, k'\,;\; max.\,(E\varepsilon'') \overline{\overline{<}}\, k''$$

sein. Ist $k' = k'' = k$ oder sind k' und k'' in geringerem Verhältnisse verschieden, als die Maximalwerthe von $E\varepsilon'$ und $E\varepsilon''$, so ist nur der grössere dieser beiden Werthe massgebend, nämlich

$$max.\,(E\varepsilon) = max.\left(\frac{m-1}{2m}\,\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\;\right),$$

welcher höchstens $= k$ sein soll, wenn $k' = k'' = k$ gesetzt wird, oder höchstens $= k'$ resp. k'', jenachdem σ eine Spannung im engeren Sinne oder eine Pressung ist.

Von den Combinationen, welche die unter a. betrachteten einfachen Specialfälle 1) bis 4) zulassen, haben besonders die folgenden praktisches Interesse:

1) und 2): Zug oder Druck und Biegung,
1) und 3): Zug oder Druck und Verdrehung,
2) und 3): Biegung und Verdrehung,
2) und 4): Biegung und Verschiebung.

Die erste dieser 4 Combinationen ist schon im dritten Capitel als zusammengesetzte Biegungs-Elasticität und Festigkeit ausführlich behandelt worden.

1. Zug oder Druck und Verdrehung.

254. — Ist P die nach der Axe des geraden Stabes ziehend oder drückend wirkende Kraft, M das auf Verdrehung um die Axe wirkende Kraftmoment, so erzeugt P eine gleichförmig im Querschnitte vertheilte Spannung σ, M aber eine Spannung τ, die in einem gewissen Punkte des Umfangs am grössten ist, und in diesem letzteren Punkte findet deshalb auch der grösste Absolutwerth von $E\varepsilon$ statt.

Ist insbesondere der Querschnitt ein Kreis mit dem Radius r, so ist:

$$\sigma = \frac{P}{\pi r^2}\,;\quad max.\,\tau = \frac{2M}{\pi r^3}\ \text{(Nr. 187)}$$

$$max.\,(E\varepsilon) = \frac{P}{\pi r^2}\left(\frac{m-1}{2m} + \frac{m+1}{2m}\sqrt{1 + \left(\frac{4M}{Pr}\right)^2}\,\right).$$

255. — Nach dieser Formel ist z. B. die Anstrengung zu beurtheilen, welche eine Schraube auszuhalten hat, wenn sie oder die zugehörige Mutter entgegen dem Widerstande P durch das Kraftmoment M gedreht wird; unter r ist dabei der innere Radius des Schraubengewindes, d. h. der Radius des vollen Schraubenkerns zu verstehen.

M und P stehen hierbei in einer gewissen Beziehung zu einander, und zwar ist, wenn

a der mittlere Radius des Gewindes,
α der mittlere Steigungswinkel,
$\mu = tg\,\varrho$ der Coefficient der Gewindereibung ist,

für eine Schraube mit flachem Gewinde:

$$\frac{M}{Pa} = \frac{tg\,\alpha + \mu}{1 - \mu\,tg\,\alpha} = tg(\alpha + \varrho)$$

und für eine Schraube mit scharfem Gewinde, wenn noch 2β dessen Kantenwinkel oder $\frac{\pi}{2} - \beta$ den Neigungswinkel der Axe gegen die Erzeugungslinie der Schraubenfläche bedeutet:

$$\frac{M}{Pa} = \frac{tg\,\alpha + \mu\cos\alpha\sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}}{1 - \mu\sin\alpha\sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}}$$

oder näherungsweise wegen der Kleinheit von α und bei Einführung eines üblichen Mittelwerthes von β:

$$\frac{M}{Pa} = \frac{tg\,\alpha + 1{,}12\mu}{1 - 1{,}12\mu\,tg\,\alpha}.$$

Zum Anziehen der Mutter einer Befestigungsschraube ist zwar, um den Druck P auszuüben, wegen der hinzukommenden Reibung an der Grundfläche der Mutter ein grösseres Kraftmoment, als dieses M, erforderlich; doch wird nur durch den hier mit M bezeichneten Theil dieses Kraftmoments, welcher der Steigung der Schraube und der Reibung im Gewinde entspricht, der Schraubenbolzen auf Verdrehung in Anspruch genommen.

2. Biegung und Verdrehung.

256. — Auf den geraden stabförmigen Körper wirken Kräfte, welche rechtwinkelig und im Allgemeinen windschief gegen die Axe gerichtet sind; für einen beliebigen Querschnitt F geben sie ein auf Biegung wirkendes Moment M_1, dessen Ebene rechtwinkelig zu F, und ein auf Drehung wirkendes Moment M_2, dessen Ebene parallel F ist. M_1 ändert sich im Allgemeinen beständig von einem zum anderen Querschnitte, M_2 nur plötzlich in denjenigen Querschnittsebenen, in denen solche äussere Kräfte liegen, deren Richtungslinien die Axe nicht schneiden.

Die durch M_1 bedingte grösste Normalspannung σ des betrachteten Querschnitts findet in dem von der Biegungsaxe entferntesten Punkte A_1, die durch M_2 bedingte grösste Tangentialspannung τ im Allgemeinen in einem anderen Punkte A_2 des Umfangs statt; fallen die Punkte A_1 und A_2 zusammen, so ist ebendaselbst auch ε am grössten.

Sind die Hauptträgheitsmomente B und C des Querschnitts einander gleich $= J$, so ist (cf. Nr. 188) näherungsweise (streng genommen nur für den Kreis):

$$max.\ \tau = \frac{M_2 e}{2J}$$

in demjenigen Punkte A_2, dessen Entfernung vom Schwerpunkte am grössten $= e$ ist; liegt dieser Punkt in der Ebene des Momentes M_1, so fällt er mit A_1 zusammen und es ist:

$$max.\ \sigma = \frac{M_1 e}{J}$$

$$max.\ (E\varepsilon) = \frac{e}{J}\left(\frac{m-1}{2m} M_1 + \frac{m+1}{2m}\sqrt{M_1^2 + M_2^2}\right).$$

257. — Nach dieser Formel ist insbesondere die Anstrengung einer **Transmissionswelle** zu beurtheilen, wenn bei grösserer Länge der Welle die Schwerkräfte und Theilrisskräfte von Rädern, Riemscheiben etc. nicht so klein sind oder nicht so nahe bei den Lagern angreifen, dass ihre biegende Wirkung gegen die verdrehende Wirkung des übertragenen Kraftmomentes vernachlässigt werden darf. Indem bei der Rotation der Welle die Ebene des Momentes M_1 ihre Lage im Raum nicht ändert, geht der Punkt des Umfangs, in welchem τ am grössten ist, abwechselungsweise auf der einen und anderen Seite der Biegungsaxe durch diese Ebene von M_1 hindurch, und es ist deshalb der obige Ausdruck von $max. (E\varepsilon)$ wechselsweise $= max. (E\varepsilon')$ und $= max. (E\varepsilon'')$. Ist also k der kleinere der beiden höchstens zugelassenen Werthe k' und k'' von $E\varepsilon'$ resp. $E\varepsilon''$, so sind die Dimensionen des Querschnitts der Bedingung

$$k = \frac{e}{J}\left(\frac{m-1}{2m}M_1 + \frac{m+1}{2m}\sqrt{M_1^2 + M_2^2}\right)$$

gemäss zu bestimmen, worin für M_1 der grösste Werth des Biegungsmomentes für irgend einen Querschnitt desjenigen Wellenstücks zu setzen ist, wodurch das Drehungsmoment M_2 übertragen wird.*) Für eine cylindrische Welle vom Durchmesser d ist insbesondere

$$\frac{e}{J} = \frac{32}{\pi d^3}.$$

3. Biegung und Verschiebung.

258. — Für irgend einen Querschnitt sei M das auf Biegung wirkende Kraftmoment, R die resultirende Schubkraft; die Ebene von M theile den Querschnitt in zwei symmetrische Hälften, und der Schnitt (die Symmetrieaxe) sei die Richtungslinie von R. Die Biegungsaxe ist dann senkrecht zu diesem Schnitt, und wenn

---

*) Zur angenäherten Berechnung eines Ausdrucks von der Form $\sqrt{x^2 + y^2}$ ist es nützlich zu bemerken, dass man setzen kann:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ax + by,$$

wenn nur den Coefficienten a und b angemessene Werthe beigelegt werden, welche um so richtiger bestimmt werden können, zwischen je engeren Grenzen das Verhältniss $\frac{y}{x}$ liegend vorausgesetzt wird.

Ist nur $\frac{y}{x} < 1$ gegeben, so ist zu setzen:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}96x + 0{,}4y$$

mit einem Fehler von höchstens 4 Procent des wahren Werthes der zu berechnenden Wurzelgrösse; für $\frac{y}{x} < \frac{1}{2}$ ist:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}986x + 0{,}23y$$

mit einem Fehler von höchstens $\frac{4}{3}$ Procent, für $\frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 1$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}816x + 0{,}59y$$

mit einem Fehler von höchstens $\frac{2}{3}$ Procent des wahren Werthes.

J das Trägheitsmoment des Querschnitts in Beziehung auf die Biegungsaxe,
y die Breite im Abstande z von der letzteren,
e den Maximalwerth von z,
$dF = y\,dz$ einen der Biegungsaxe parallelen Flächenstreifen bedeutet,
so ist in allen Punkten der Breitenlinie y:

$$\sigma = \frac{Mz}{J}$$

und näherungsweise nach Nr. 172:

$$\tau = \frac{R}{Jy}\int_z^e z\,dF\,;$$

folglich nach Nr. 253 für den ganzen Querschnitt:

$$max.\,(E\varepsilon) = \frac{M}{J}\cdot max.\left(\frac{m-1}{2m}z + \frac{m+1}{2m}\sqrt{z^2 + \left[\frac{2R}{My}\int_z^e z\,dF\right]^2}\right).$$

Der dem Maximum entsprechende Werth von z ist von der Form des Querschnitts und von dem Verhältnisse zwischen M und R abhängig.

259. — Es sei z. B. ein parallelepipedischer Körper, dessen Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten b und c ist, am einen Ende befestigt, am anderen frei und hier, im Abstande a von der Befestigungsstelle, durch die parallel den Seiten c wirkende und die Axe rechtwinkelig schneidende Kraft P angegriffen. Die gefährlichste Wirkung findet dann in dem unmittelbar an der Befestigungsstelle liegenden Querschnitte statt, und zwar ergiebt die obige Formel mit

$$y = b\,;\quad e = \frac{c}{2}\,;\quad J = \frac{bc^3}{12}\,;\quad R = P\,;\quad M = Pa$$

für eine Breitenlinie im Abstande $z = \alpha\,\frac{c}{2}$ von der Biegungsaxe jenes Querschnitts:

$$E\varepsilon = \frac{6Pa}{bc^2}\left(\frac{m-1}{2m}\alpha + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\alpha^2 + \frac{c^2}{4a^2}(1-\alpha^2)^2}\right),$$

z. B. mit $m = 4$:

$$E\varepsilon = \frac{3Pa}{4bc^2}\cdot f(\alpha)\,;\quad f(\alpha) = 3\alpha + 5\sqrt{\alpha^2 + \frac{c^2}{4a^2}(1-\alpha^2)^2}\,.$$

Die Art und Weise, wie sich $f(\alpha)$ mit α ändert und wie dieses Aenderungsgesetz durch den Werth des Verhältnisses $\frac{a}{c}$ bedingt wird, macht die folgende tabellarische Zusammenstellung anschaulich.

α	$\frac{a}{c}=\frac{1}{16}$ $f(\alpha)$	$\frac{a}{c}=\frac{2}{16}$ $f(\alpha)$	$\frac{a}{c}=\frac{4}{16}$ $f(\alpha)$	$\frac{a}{c}=\frac{5}{16}$ $f(\alpha)$	$\frac{a}{c}=\frac{6}{16}$ $f(\alpha)$	$\frac{a}{c}=\frac{8}{16}$ $f(\alpha)$
0	40	20	10	8	6,667	5
0,1	39,903	20,106	10,213	8,236	6,919	5,275
0,2	beständige Abnahme bis …	19,813	10,252	8,345	7,078	5,503
0,3		beständige Abnahme bis …	10,123	8,333	7,149	5,691
0,4			9,835	8,211	7,146	5,852
0,5			9,406	8	7,090	6,007
0,6			8,868	7,734	7,016	6,186
0,7			8,285	7,476	6,979	6,430
0,8			7,781	7,329	7,065	6,786
0,9		8,590	7,585	7,450	7,375	7,299
1	8	8	8	8	8	8

Hiernach ist für $\frac{a}{c}=\frac{5}{16}$: $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 8$ und zwischen $f(0)$ und $f\left(\frac{1}{2}\right)$ liegt ein Maximum, zwischen $f\left(\frac{1}{2}\right)$ und $f(1)$ ein Minimum von $f(\alpha)$.

Für grössere Werthe von $\frac{a}{c}$ bleiben zwar das Maximum und das Minimum einstweilen noch bestehen, allein sehr bald, z. B. schon für $\frac{a}{c}=\frac{3}{8}$ wird das Maximum kleiner, als der unveränderliche Grenzwerth $f(1) = 8$. Wird $\frac{a}{c}$ noch grösser, so verschwinden das Maximum und das Minimum von $f(\alpha)$ gänzlich, und z. B. schon für $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$ findet eine beständige Zunahme statt von $f(0)$ bis $f(1)$.

Wird $\frac{a}{c} < \frac{5}{16}$, so wird zunächst das Maximum verhältnissmässig weniger von $f(0)$, das Minimum verhältnissmässig weniger von $f(1)$ verschieden; alsbald bei weiterer Abnahme von $\frac{a}{c}$ verschwindet zunächst das Minimum gänzlich, z. B. schon für $\frac{a}{c}=\frac{1}{8}$, später auch das Maximum, z. B. schon für $\frac{a}{c}=\frac{1}{16}$, bei welchem wie bei jedem noch kleineren Verhältnisse $\frac{a}{c}$ eine beständige Abnahme von $f(0)$ bis $f(1)$ stattfindet.

Uebrigens ist das etwa noch vorhandene Maximum für $\frac{a}{c} \geqq \frac{5}{16}$ stets nur so wenig $> f(1)$ und für $\frac{a}{c} \leqq \frac{5}{16}$ stets nur so wenig $> f(0)$, dass man mit einem für praktische Anwendungen meistens unwesentlichen Fehler, jenachdem

$$\frac{a}{c} \gtrless \frac{5}{16}, \text{ d. h. } \gtrless \frac{m+1}{4m}$$

ist, das grösste $f(\alpha) = f(1)$ oder $= f(0)$ setzen, d. h. den Körper auf blosse Biegungsfestigkeit oder auf blosse Schubfestigkeit berechnen darf.

260. — Das rechteckige Gewinde einer Schraube von schwacher Steigung, welche nach der Richtung ihrer Axe den Druck P auszuüben hat, ist, soweit es in der Mutter enthalten ist, als ein prismatischer Körper wie der in der vorigen Nr. untersuchte zu betrachten, dessen Dimension b die beiden anderen bedeutend übertrifft; es ist nämlich $b =$ dem Umfange des Schraubenkerns multiplicirt mit der Anzahl der in der Mutter enthaltenen Windungen, $c =$ der Dicke des Gewindes zu setzen.

Wenn das Gewinde ohne irgend einen Spielraum in das entsprechende Muttergewinde passt, so ist eine Biegung unmöglich, die Maximalanstrengung folglich nach der in der Anhaftungsfläche hervorgerufenen grössten Tangentialspannung zu beurtheilen, welche nach Nr. 173:

$$max. \tau = \frac{3}{2} \frac{P}{bc}$$

ist. Ist aber ein Spielraum vorhanden, der bis zu einem gewissen Grade eine Biegung zulässt, so ist die Dimension a der vorigen Nr. $= \frac{t}{2} =$ der halben Tiefe (dem halben Vorsprung) des Gewindes zu setzen, wenn man den Druck P in der mittleren Schraubenlinie concentrirt denkt, in welcher in der That nahezu die entgegengesetzt gebogenen Gewinde der Schraube und der Mutter sich berühren müssten; sofern nun $t \gtreqless c$ ist, wäre $\frac{t}{2c} = \frac{a}{c} \gtreqless \frac{1}{2}$, also gewiss $> \frac{m+1}{4m}$, das Gewinde folglich nur auf Biegung zu berechnen, wodurch die grösste Spannung:

$$max. \sigma = \frac{P \frac{t}{2} \cdot \frac{c}{2}}{\frac{bc^3}{12}} = \frac{3Pt}{bc^2}$$

hervorgerufen wird.*)

Ist d der Durchmesser des Schraubenkerns (der innere Durchmesser des Gewindes), h die Höhe der Mutter, so kann man auch setzen:

$$bc = \frac{\pi dh}{2}$$

und deshalb im 1ten Falle: $max. \tau = \frac{3P}{\pi dh}$,

im 2ten Falle: $max. \sigma = \frac{6Pt}{\pi dhc} = \frac{6P}{\pi dh}$ mit $t = c$.

*) Zur Ermöglichung einer die Elasticitätsgrenze nicht überschreitenden Biegung bedarf es nur eines äusserst geringen Spielraums; wenn freilich die Belastung bis zum Bruch gesteigert wird, so kann es sein, dass jener Spielraum nicht mehr genügt und deshalb die schliessliche Zerstörung des Gewindes mehr durch Abschiebung, als durch Biegung erfolgt.

Dieselben Formeln gelten für das Muttergewinde, wenn unter d der äussere (grössere) Durchmesser verstanden wird; die Mutter läuft also geringere Gefahr einer übermässigen Anstrengung, sofern nicht etwa die Festigkeit des Materials, woraus sie besteht, in bedeutenderem Masse, als im Verhältnisse des inneren zum äusseren Gewindedurchmesser, kleiner ist, als die Festigkeit des Materials der Schraubenspindel.

261. — Aus der Untersuchung in Nr. 259 ist zu schliessen, dass auch in anderen Fällen, sofern nur nicht der Querschnitt in der Biegungsaxe sich auf eine geringere Breite zusammenzieht und deshalb τ erst in grösserer Entfernung von derselben mit wachsendem z merklich abnimmt, der Körper ohne grossen Fehler auf blosse Biegungsfestigkeit oder auf blosse Schubfestigkeit berechnet werden darf, jenachdem

$$E\varepsilon \text{ für } z = e \gtrless E\varepsilon \text{ für } z = 0$$

ist, folglich, mit Rücksicht auf die allgemeinere Formel für $E\varepsilon$ in Nr. 258, jenachdem

$$\frac{Me}{J} \gtrless \frac{m+1}{m}\frac{R}{Jy_0}\int_0^e z\,dF \text{ oder } \frac{M}{R} \gtrless \frac{m+1}{m}\frac{\int_0^e z\,dF}{ey_0}$$

ist, unter y_0 die Breite in der Biegungsaxe verstanden. (Cf. Nr. 174.) Dass insbesondere für den kreisförmigen Querschnitt diese Bemerkung mit ungefähr demselben Rechte gilt, wie für den rechteckigen, folgt aus dem analogen Abhängigkeitsgesetze zwischen τ und z in beiden Fällen: cf. Nr. 173.

262. — Bei einem doppelt-Tförmigen Querschnitte (Fig. 5, Nr. 48), der in Beziehung auf die Biegungsaxe symmetrisch vorausgesetzt werden möge ($b = b_1$ und $d = d_1$), darf man die Dimensionen b, d und e blos mit Rücksicht auf das Biegungsmoment M bestimmen; die Dimension a dagegen ist von M und R zugleich abhängig zu machen, nämlich von dem grössten Werthe von ε, der irgend einem Werthe von $z < f$ $(= e - d)$ entspricht. In dieser Beziehung genügt es, den grösseren der beiden Grenzwerthe von $E\varepsilon$, welche $z = 0$ und $z = f$ entsprechen, als massgebend zu Grunde zu legen; dieselben sind:

$$z = 0;\ E\varepsilon_0 = \frac{m+1}{m}\frac{R}{J}\frac{H_0}{a}$$

$$z = f;\ E\varepsilon_1 = \frac{M}{J}\left(\frac{m-1}{2m}f + \frac{m+1}{2m}\sqrt{f^2 + 4\left(\frac{R}{M}\frac{H_1}{a}\right)^2}\right)$$

mit $J = \frac{2}{3}\left[be^3 - (b-a)f^3\right]$

$$H_1 = \int_f^e z\,dF = bd\left(e - \frac{d}{2}\right) = b\,\frac{e^2 - f^2}{2}$$

$$H_0 = \int_0^e z\,dF = H_1 + \frac{af^2}{2}.$$

Welcher von diesen beiden Grenzwerthen der grössere ist, hängt von den Dimensionsverhältnissen und von dem Verhältnisse $\frac{M}{R}$ ab; man findet $E\varepsilon_1 \gtrless E\varepsilon_0$ jenachdem

$$\frac{M^2}{R^2} + \frac{m^2-1}{m}\frac{H_0}{af}\frac{M}{R} \gtrless \frac{(m+1)^2}{m}\frac{H_0^2 - H_1^2}{a^2 f^2}$$

oder
$$\frac{M}{R} \gtrless \frac{m+1}{m}\frac{1}{af}\left(-\frac{m-1}{2}H_0 + \sqrt{\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 H_0^2 - m H_1^2}\right)$$

ist, für $m = 3$ z. B. jenachdem

$$\frac{M}{R} \gtrless \frac{4}{3af}\left(-H_0 + \sqrt{4H_0^2 - 3H_1^2}\right).$$

263. — Die rationellste Querschnittsform wäre diejenige, bei welcher in jedem Abstande z von der Biegungsaxe

$$E\varepsilon = Const. = \frac{Me}{J}$$

oder:
$$\frac{m-1}{2m}z + \frac{m+1}{2m}\sqrt{z^2 + \left[\frac{2R}{My}\int_z^e zdF\right]^2} = e$$

ist, eine Bedingung, welche, wenn

$$z = \alpha e \text{ und } \sqrt{1 - \frac{m-1}{m}\alpha - \frac{1}{m}\alpha^2} = f(\alpha)$$

gesetzt wird, auf die Form:

$$\frac{Re}{My}\int_\alpha^1 y\alpha\, d\alpha = \frac{m}{m+1}\cdot f(\alpha)$$

gebracht werden kann und zu der Differentialgleichung führt:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{df(\alpha) + \frac{m+1}{m}\frac{Re}{M}\alpha\, d\alpha}{f(\alpha)}.$$

Die Integration giebt, wenn a den Werth von y für $\alpha = 0$ bedeutet:

$$lg\frac{y}{a} = -lg f(\alpha) - \frac{Re}{M}\cdot\varphi(\alpha)$$

$$\varphi(\alpha) = 0{,}43429..(m+1)\left[1 - f(\alpha) - \frac{m-1}{2\sqrt{m}}\left(arc\sin\frac{2\alpha+m-1}{m+1} - arc\sin\frac{m-1}{m+1}\right)\right].$$

Die Logarithmen sind gemeine. Insbesondere für $m = 4$ sind die $\alpha = 0{,}1;\ 0{,}2\ldots\ 0{,}9$ entsprechenden Werthe von $-lg f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$, so wie auch die Werthe von $\frac{y}{a}$, welche sich damit ergeben, wenn beispielsweise

$$\frac{M}{Re} = 5$$

gesetzt wird,*) in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

---

*) Wenn ein an beiden Enden unterstützter Balken in der Mitte die Last P trägt, so wächst M vom Ende bis zur Mitte von 0 bis $\frac{Pl}{4}$ oder von 0 bis $5Pe$, wenn etwa

α	$-lg f(\alpha)$	$\varphi(\alpha)$	$\frac{y}{a}$
0,1	0,01752	0,00280	1,040
0,2	0,03786	0,01144	1,085
0,3	0,06175	0,02677	1,139
0,4	0,09023	0,04938	1,203
0,5	0,12494	0,08065	1,285
0,6	0,16862	0,12256	1,394
0,7	0,22642	0,17811	1,552
0,8	0,30990	0,25337	1,816
0,9	0,45593	0,36348	2,417

Für $\alpha = 1$ ergiebt sich $\frac{y}{a} = \infty$, und es ist deshalb vollkommen diese ideale Querschnittsform nicht zu realisiren.

264. — Eine nur angenäherte Verwirklichung ist übrigens auch schon dadurch geboten, dass das hier zu Grunde liegende Vertheilungsgesetz der Tangentialspannung τ selbst nur angenähert richtig ist und um so unrichtiger wird, je mehr sich der Umfang des Querschnitts gegen die z-Axe neigt, während α der Grenze 1 sich nähert (cf. Nr. 252). Begnügt man sich deshalb, nur von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_1$ der Forderung $E\varepsilon = \frac{Me}{J}$ zu entsprechen, während von $\alpha = \alpha_1$ bis $\alpha = 1$ die Breite y constant $= b$ gemacht wird, so ist mit $y = A a$, unter A die in voriger Nr. bestimmte, von dem Verhältnisse $\frac{M}{Re}$ abhängige Function von α verstanden:

$$\int_0^e z\,dF = e^2\int_0^1 y\alpha\,d\alpha = e^2\left(a\int_0^{\alpha_1} A\alpha\,d\alpha + b\,\frac{1-\alpha_1^2}{2}\right)$$

$$J = 2\int_0^e z^2\,dF = 2e^3\int_0^1 y\alpha^2\,d\alpha = 2e^3\left(a\int_0^{\alpha_1} A\alpha^2\,d\alpha + b\,\frac{1-\alpha_1^3}{3}\right).$$

Ist nun der von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_1$ constante Werth von $E\varepsilon$, welcher insbesondere für $\alpha = 0$ den Ausdruck:

$$\frac{m+1}{m}\,\frac{R}{Ja}\int_0^e z\,dF$$

hat, $= k$ gegeben, so sind durch die beiden Gleichungen

$$\frac{Me}{J} = \frac{m+1}{m}\,\frac{R}{Ja}\int_0^e z\,dF = k$$

$l = 20e$ oder die Länge das 10fache der Höhe wäre; R wäre dabei constant $= \frac{P}{2}$, also $\frac{M}{Re} = 0$ bis 10, so dass die Voraussetzung $\frac{M}{Re} = 5$ dem Mittelwerthe oder demjenigen Querschnitte eines solchen Balkens entspräche, welcher auf $1/4$ der Länge vom Ende aus gerechnet liegt.

mit Rücksicht auf die obigen Ausdrücke von $\int_0^e z\,dF$ und J zwei der 4 Grössen

$$a \quad b \quad e \quad \alpha_1$$

bestimmt, wenn die übrigen gegeben sind. Sind etwa e und α_1 gegeben, so sind a und b bestimmt durch

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{m}{m+1}\frac{M}{Re} - \int_0^{\alpha_1} A\alpha\,d\alpha}{\frac{1-\alpha_1^2}{2}}$$

und

$$a\int_0^{\alpha_1} A\alpha^2 d\alpha + b\frac{1-\alpha_1^3}{3} = \frac{M}{2e^2k}.$$

Die Integrale $\int_0^{\alpha_1} A\alpha\,d\alpha$ und $\int_0^{\alpha_1} A\alpha^2 d\alpha$ sind durch mechanische Quadratur zu berechnen, nachdem die Zahlenwerthe von $A = \frac{y}{a}$ für den betreffenden Querschnitt und für eine Werthreihe von α nach der vorigen Nr. berechnet wurden. Für das dort gerechnete Beispiel findet man

$$\text{mit } \alpha_1 = 0{,}8 \text{ oder } 0{,}9$$

$$\frac{b}{a} = 19{,}8 \text{ resp. } 35{,}6.$$

Weil aber M und $\frac{M}{Re}$ von einem zum anderen Querschnitte eines Trägers sich ändern, so müsste die ganze Rechnung für eine Reihe von Querschnitten wiederholt werden, um so zu derjenigen Trägerform zu gelangen, bei welcher die Widerstandsfähigkeit des Materials den Umständen gemäss so vollkommen als möglich verwerthet ist.*)

265. — Schliesslich ist zu bemerken, dass auch die **Biegung eines geraden stabförmigen Körpers unter der Einwirkung von Kräften, welche seine Axe rechtwinkelig schneiden**, zum Theil durch die verschiebende Wirkung der Kräfte R für die verschiedenen Querschnitte bedingt ist.

Sind O und O_1 zwei Punkte der Axe eines prismatischen Stabes in der Entfernung x von einander, und wird O als Anfangspunkt der Coordinatenaxen angenommen, so dass O_1 in der positiven x-Axe liegt, so erhält man die Verrückung von O_1 gegen O nach der Richtung OZ, d. h. die auf die

*) Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass diese Aufgabe mehr ein theoretisches, als praktisches Interesse hat, indem die Modell- oder sonstigen Herstellungskosten eines solchen Trägers ohne Zweifel die Materialersparniss im Vergleich mit einem gewöhnlichen doppelt-Tförmigen Träger mehr als aufwiegen würden. Bei einem Blechträger wird bis zu einem gewissen Grade schon von selbst der theoretischen Form entsprochen durch die Winkeleisen, welche die Mittelwand mit den Gurtungen verbinden.

xz-Ebene und die x-Axe bezogene Durchbiegung bei O_1 aus dem Ausdrucke von ζ in Nr. 239 mit $y = z = 0$:

$$\zeta = -a_2\frac{x^2}{2} - b_2\frac{x^3}{6} + x\left(\frac{dQ}{dz}\right)_0$$

oder weil nach derselben Nr.

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right)_0 = \frac{\tau_0}{G} = \gamma_0$$

ist, unter τ_0 den Werth von τ_y für $y = z = 0$ und unter γ_0 die entsprechende Verschiebung verstanden, auch:

$$\zeta = -a_2\frac{x^2}{2} - b_2\frac{x^3}{6} + \gamma_0 x.$$

Dabei ist nur vorausgesetzt, dass zwischen den Querschnitten bei O und O_1 keine äusseren Kräfte auf die Oberfläche des Körpers wirken, und es ist nach Nr. 240 und 241:

$$a_2 = \frac{M}{EJ}; \quad b_2 = \frac{R}{EJ},$$

wenn M (positiv für die Drehungsrichtung zx), R (positiv für die Richtung OZ) und J die in Nr. 258 erklärten Bedeutungen haben.

Wenn insbesondere auf den von der yz-Ebene nach der Richtung OX hin liegenden Stabtheil keine anderen Kräfte wirken, als eine in O_1 angreifende und nach der z-Axe gerichtete Kraft P, so ist

$$R = P \text{ und } M = -Px$$

$$\zeta = \frac{P}{EJ}\frac{x^3}{3} + \gamma_0 x.$$

Der erste Summand ist hier diejenige Durchbiegung, welche sich nach den Formeln des zweiten Capitels ergiebt, der zweite folglich die Correction mit Rücksicht auf die Verschiebung der Querschnitte, und es ist daraus allgemein zu schliessen, dass die nach den Regeln des zweiten Capitels in irgend einem Falle berechnete Durchbiegung durch einen Summanden von der Form

$$\int \gamma_0 dx = \frac{1}{G}\int \tau_0 dx$$

corrigirt werden muss. Mit

$$\tau_0 = \frac{R}{Jy_0}\int_0^e z\,dF$$

nach Nr. 172 (y_0 = Breite in der Biegungsaxe) ist aber für den obigen speciellen Fall:

$$\gamma_0 x = \frac{P}{GJ}\frac{x}{y_0}\int_0^e z\,dF = \frac{P}{EJ}\frac{x^3}{3}\frac{3E}{Gx^2 y_0}\int_0^e z\,dF$$

und $\frac{3E}{Gx^2 y_0}\int_0^e z\,dF$ eine kleine Grösse der 2ten Ordnung, wenn die Querschnittsdimensionen klein im Vergleich mit der Länge x sind. In solchen Fällen kann deshalb überhaupt ohne wesentlichen Fehler von der fraglichen Correction Abstand genommen werden.

B. Plattenförmige Körper.

266. — Es häufen sich hier die Schwierigkeiten einer strengen Behandlung, so dass man darauf hingewiesen wird, vor Allem zunächst die einfachsten Specialfälle zu untersuchen, deren Resultate dann als Anhaltspunkte für die Beurtheilung weniger einfacher Fälle dienen können.

Ausser einer solchen Vereinfachung, worauf schon die Untersuchung der stabförmigen Körper sub **A.** beruhte und welche in der Voraussetzung solcher Körperformen und Belastungszustände besteht, die es gestatten, gewisse der 6 Spannungen

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

mit voraussichtlich nur kleinem Fehler für alle Punkte des Körpers a priori = Null zu setzen, wird aber eine weitere Vereinfachung durch die Voraussetzung solcher Körperformen und Belastungszustände herbeigeführt, wobei sich a priori Schaaren von Linien oder von Flächen der Art im Körper angeben lassen, dass in allen Punkten je einer solchen Linie oder Fläche derselbe Spannungszustand, sowie eine gleich grosse und senkrecht zu der betreffenden Linie oder Fläche gleicher Spannung gerichtete Verrückung stattfindet. Die im Allgemeinen drei Verrückungscomponenten ξ, η, ζ werden dadurch offenbar im Falle der Linien gleicher Spannung auf nur zwei, im Falle der Flächen gleicher Spannung auf nur eine reducirt.

In einem solchen Falle ist es dann auch angemessen, das rechtwinkelige Coordinatensystem durch ein anderes zu ersetzen, welches sich den Linien oder Flächen gleicher Spannung anschliesst, sowie den Körper in entsprechend andere Elemente zu zerlegen, wodurch natürlich die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Spannungen und der äusseren Kraft eines solchen Körperelements von anderer Form werden, als die allgemeinen Gleichungen (I) in Nr. 229.

I. Kugelschale mit gleichförmiger Dicke und symmetrischer Belastung.

267. — Die gleichförmig dicke Wand eines kugelförmigen Gefässes sei einem gleichförmigen inneren und äusseren Normaldrucke ausgesetzt;

r_1 sei der innere, r_2 der äussere Radius,
p_1 „ „ „ , p_2 „ „ Druck auf die Einheit der Oberfläche.

Eine beliebige zwischen den beiden Oberflächen liegende, mit ihnen concentrische Kugelfläche, deren Radius = r sei, ist eine Fläche gleicher Spannung; für einen beliebigen Punkt derselben sei

ϱ die Verrückung nach der Richtung des Radius r, positiv, wenn auswärts gerichtet,
σ_r die Normalspannung in radialer Richtung,
σ_φ die nach jeder tangentialen Richtung gleich grosse Normalspannung.

Alle diese Grössen sind Functionen blos von r; σ_r und σ_φ sind Hauptspannungen.

Für einen beliebigen Punkt der Kugelfläche mit dem Radius r ist ferner:

$\frac{d\varrho}{dr}$ die Ausdehnung nach der Richtung des Radius,

$\frac{\varrho}{r}$ die Ausdehnung nach jeder tangentialen Richtung,

also der Volumenausdehnungscoefficient:

$$\mu = \frac{d\varrho}{dr} + 2\frac{\varrho}{r}$$

und nach den Gleichungen (VI) in Nr. 229:

$$\sigma_r = 2G\left(\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\mu}{m-2}\right) = \frac{2G}{m-2}\left[(m-1)\frac{d\varrho}{dr} + 2\frac{\varrho}{r}\right]$$

$$\sigma_\varphi = 2G\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{\mu}{m-2}\right) = \frac{2G}{m-2}\left(\frac{d\varrho}{dr} + m\frac{\varrho}{r}\right).$$

Denkt man nun von zwei Radien, welche den Winkel $d\varphi$ mit einander bilden, den einen um den anderen gedreht und dadurch aus der Kugelschale, deren innerer Radius $= r$ und deren äusserer Radius $= r + dr$ ist, ein unendlich kleines Körperelement herausgeschnitten, so wird dasselbe begrenzt von den als eben zu betrachtenden Calotten:

$$\pi r^2 d\varphi^2 \text{ und } \pi(r+dr)^2 d\varphi^2$$

und von der Kegelfläche: $2\pi r\, d\varphi\, dr$. Die Spannungen dieser Flächen sind Normalspannungen und auf die Flächeneinheit bezogen resp.

$$= \sigma_r; \quad \sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr}dr; \quad \sigma_\varphi.$$

Abgesehen von einer auf die Masse des Körperelements etwa wirkenden äusseren Kraft wird nun das Gleichgewicht der Spannungen seiner Oberfläche ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr}dr\right) . \pi(r+dr)^2 d\varphi^2 = \sigma_r . \pi r^2 d\varphi^2 + \sigma_\varphi d\varphi . 2\pi r\, d\varphi\, dr,$$

welche bei Weglassung der unendlich kleinen Glieder von höherer, als der dritten Ordnung, sich auf die folgende Gleichung reducirt, die sonach hier an die Stelle der Gleichungen (I) in Nr. 229 tritt:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{r}(\sigma_\varphi - \sigma_r).$$

Mit Rücksicht auf die obigen Ausdrücke von σ_r und σ_φ geht sie über in:

$$\frac{d^2\varrho}{dr^2} + 2\frac{d\frac{\varrho}{r}}{dr} = 0 \text{ und liefert: } \frac{d\varrho}{dr} + 2\frac{\varrho}{r} = \mu = \text{Const.},$$

woraus durch eine zweite Integration, wodurch eine neue Constante c eingeführt wird, folgt:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{\mu}{3} + \frac{c}{r^3}; \quad \frac{d\varrho}{dr} = \frac{\mu}{3} - 2\frac{c}{r^3},$$

folglich:

$$\sigma_r = 2G\left(\frac{\mu}{3} - 2\frac{c}{r^3} + \frac{\mu}{m-2}\right) = A - 2\frac{B}{r^3}$$

$$\sigma_\varphi = 2G\left(\frac{\mu}{3} + \frac{c}{r^3} + \frac{\mu}{m-2}\right) = A + \frac{B}{r^3},$$

wenn die aus μ und c zusammengesetzten Constanten kürzer mit A und B bezeichnet werden. Die letzteren sind dadurch bestimmt, dass

$$\sigma_r = -p_1 \text{ sein muss für } r = r_1$$
$$\text{und } \sigma_r = -p_2 \;\;\text{„} \;\;\text{„} \;\;\text{„} \;\; r = r_2.$$

Die Einsetzung der hiernach bestimmten Werthe von A und B giebt:

$$\sigma_r = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3}\left[p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3 + (p_2 - p_1)\frac{r_1^3 r_2^3}{r^3}\right]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3}\left[p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3 + (p_1 - p_2)\frac{r_1^3 r_2^3}{2r^3}\right]$$

und endlich für die entsprechenden Hauptausdehnungen ε_r und ε_φ (cf. Nr. 229, Gl. V):

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \frac{2\sigma_\varphi}{m} = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3}\left[\frac{m-2}{m}(p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3) + \frac{m+1}{m}(p_2 - p_1)\frac{r_1^3 r_2^3}{r^3}\right]$$

$$E\varepsilon_\varphi = \sigma_\varphi - \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{m} = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3}\left[\frac{m-2}{m}(p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3) + \frac{m+1}{2m}(p_1 - p_2)\frac{r_1^3 r_2^3}{r^3}\right].$$

268. Wenn die kleinere der beiden Pressungen p_1 und p_2 nicht wesentlich grösser, als der atmosphärische Druck ist, so kann man sie $= 0$ und die andere = dem Ueberdrucke p ($= p_1 - p_2$ resp. $= p_2 - p_1$) setzen, um so mehr, als ja die Festigkeitscoefficienten, mit denen man schliesslich rechnet, aus Versuchen in der atmosphärischen Luft, nicht etwa im leeren Raume, ohne weitere Reduction abgeleitet werden.

Für inneren Ueberdruck ($p_1 > p_2$) ist dann mit $p_2 = 0$ und $p_1 = p$:

$$E\varepsilon_r = -\frac{p r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_2^3}{r^3} - \frac{m-2}{m}\right)$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{p r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\left(\frac{m+1}{2m}\frac{r_2^3}{r^3} + \frac{m-2}{m}\right)$$

$$max.\,(-E\varepsilon_r) = p\,\frac{(m+1)\,r_2^3 - (m-2)\,r_1^3}{m\,(r_2^3 - r_1^3)} \text{ für } r = r_1$$

$$max.\,(\;E\varepsilon_\varphi) = p\,\frac{(m+1)\,r_2^3 + 2\,(m-2)\,r_1^3}{2m\,(r_2^3 - r_1^3)} \text{ für } r = r_1.$$

Die grösste Anstrengung des Materials findet folglich an der Innenfläche der Kugelschale statt. Soll eine positive Ausdehnung höchstens $= \frac{k'}{E}$, der Absolutwerth einer negativen Ausdehnung höchstens $= \frac{k''}{E}$ sein, so erhält man

$$\text{entsprechend } max.\,(-E\varepsilon_r) = k'':\ \frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{mk'' - (m-2)p}{mk'' - (m+1)p}}$$

$$\text{entsprechend } max.\,(E\varepsilon_\varphi) = k':\ \frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{2mk' + 2(m-2)p}{2mk' - (m+1)p}}$$

und es ist $\frac{r_2}{r_1}$ zur Berechnung der Wandstärke $\delta = r_2 - r_1$ bei gegebenem Werthe von r_1 oder r_2 dem grösseren dieser beiden Wurzelwerthe gleich zu setzen, also = dem ersten oder zweiten, jenachdem

$$k' \gtrless \frac{m-1}{2} k'' - \frac{(m+1)(m-2)}{2m} p$$

ist. Mit $k' = k'' = k$ ist der erste Ausdruck der grössere, also

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{mk - (m-2)p}{mk - (m+1)p}}$$

zu setzen, wenn

$$\frac{p}{k} > \frac{m(m-3)}{(m+1)(m-2)}$$

ist, was für $m = 3$ immer stattfindet. Jedenfalls muss $p < \frac{m}{m+1} k$ sein, widrigenfalls der Forderung durch keine noch so grosse Wandstärke entsprochen werden könnte. Ist aber $\frac{p}{k}$ ein kleiner Bruch, so kann näherungsweise gesetzt werden*):

$$\frac{\delta}{r_1} = \frac{1}{m}\frac{p}{k}\left(1 + \frac{p}{k}\right).$$

269. — Für äusseren Ueberdruck ($p_2 > p_1$) ist mit $p_1 = 0$ und $p_2 = p$:

$$E\varepsilon_r = \frac{p r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_1^3}{r^3} - \frac{m-2}{m}\right)$$

$$E\varepsilon_\varphi = -\frac{p r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}\left(\frac{m+1}{2m}\frac{r_1^3}{r^3} + \frac{m-2}{m}\right);$$

ε_r ist überall positiv, wenn $\frac{r_1}{r_2} > \sqrt[3]{\frac{m-2}{m+1}}$, z. B. mit $m = 3$, wenn $\frac{r_1}{r_2} > \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0{,}63$ ist. Dies vorausgesetzt, ist:

$$max.\,(E\varepsilon_r) = p\,\frac{3}{m}\,\frac{r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} \text{ für } r = r_1,$$

$$\text{während immer } max.\,(-E\varepsilon_\varphi) = p\,\frac{3(m-1)}{2m}\,\frac{r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} \text{ für } r = r_1$$

---

*) Sind x und y kleine Brüche, so ist mit Vernachlässigung kleiner Grössen von höherer, als der 2ten Ordnung:

$$\sqrt[n]{\frac{1+x}{1+y}} = 1 + \frac{1}{n}(x-y)\left[1 - \frac{n-1}{2n}x - \frac{n+1}{2n}y\right];$$

daraus erhält man die obige Näherungsformel mit

$$\frac{r_2}{r_1} = 1 + \frac{\delta}{r_1};\ n = 3;\ x = -\frac{m-2}{m}\frac{p}{k};\ y = -\frac{m+1}{m}\frac{p}{k}.$$

und folglich auch hier das Material an der Innenfläche der Kugelschale am stärksten angestrengt ist.

$$max.\ (E\varepsilon_r) = k' \text{ entspricht } \frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{m}\frac{p}{k'}}$$

$$max.\ (-E\varepsilon_\varphi) = k'' \text{ entspricht } \frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{1 - \frac{3(m-1)}{2m}\frac{p}{k''}},$$

und wenn eine positive Ausdehnung höchstens $= \frac{k'}{E}$, der Absolutwerth einer negativen höchstens $= \frac{k''}{E}$ sein soll, so ist $\frac{r_1}{r_2}$ dem kleineren beider Wurzelwerthe gleich zu setzen, also = dem ersten oder zweiten, jenachdem

$$k'' \gtrless \frac{m-1}{2} k'.$$

Mit $k' = k'' = k$ ist die Wandstärke $\delta = r_2 - r_1$ jedenfalls vermittels der Formel:

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{1 - \frac{3(m-1)}{2m}\frac{p}{k}}$$

zu berechnen, welche, wenn $\frac{p}{k}$ ein kleiner Bruch ist, näherungsweise ersetzt werden kann durch:

$$\frac{\delta}{r_1} = \frac{m-1}{2m}\frac{p}{k}\left(1 + \frac{m-1}{m}\frac{p}{k}\right).$$

II. Umdrehungskörper mit symmetrischer Belastung.

270. — Für irgend einen Punkt O des Körpers sind hier naturgemäss 3 zu einander senkrechte ausgezeichnete Richtungen zu unterscheiden:

die axiale Richtung OA,

die radiale Richtung OR und

die tangentiale Richtung $O\Phi$, d. h. die Richtung der Tangente des durch den Punkt O gehenden Parallelkreises. Dieser Parallelkreis ist eine Linie gleicher Spannung; alle seine Punkte erfahren gleiche Verrückungen und zwar nur nach axialer und radialer Richtung, welche resp. mit α und ϱ bezeichnet seien. Ist dann noch r der Radius des betreffenden Parallelkreises, so sind die Ausdehnungen nach den genannten 3 ausgezeichneten Richtungen:

$$\varepsilon_a = \frac{d\alpha}{da};\quad \varepsilon_r = \frac{d\varrho}{dr};\quad \varepsilon_\varphi = \frac{\varrho}{r}.$$

Die Grössen α und ϱ sind als Functionen von a (Entfernung der Ebene des Parallelkreises von einem festen Punkte der Körperaxe) und r bestimmt durch 2 Gleichgewichtsbedingungen der auf ein Körperelement wirkenden Kräfte in Verbindung mit den Oberflächenbedingungen. Ein solches Element (Fig. 36) wird aus dem Körper naturgemäss herausgeschnitten durch zwei zur Axe im Abstande $OA = da$ senkrechte Ebenen,

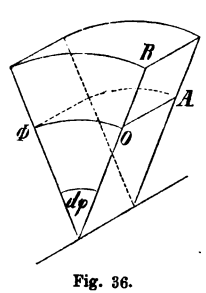


Fig. 36.

zwei unter dem Winkel $d\varphi$ gegen einander geneigte Meridianebenen und zwei concentrische Cylinderflächen mit den Radien r und $r + dr$. Von den 3 ursprünglich rechten Winkeln an den Kanten OA, OR und $O\Phi$ dieses Körperelementes kann durch die symmetrische Belastung, infolge welcher der Körper nach wie vor ein vollkommener Umdrehungskörper bleibt, offenbar nur der letzte eine Aenderung erfahren; von den drei Tangentialspannungen τ_a, τ_r und τ_φ sind also die beiden ersten $= 0$, die dritte werde einfach mit τ bezeichnet. Damit liegt der in Nr. 231 betrachtete Specialfall vor, und es ist von den 3 Normalspannungen σ_a, σ_r und σ_φ die letzte eine Hauptspannung.

Als äussere auf die Masse des Körperelementes wirkende Kraft kann hier, während die Schwere stets zu vernachlässigen ist, unter Umständen die Centrifugalkraft einen wesentlichen Einfluss haben, wenn nämlich der Körper in schneller Rotation um seine Axe begriffen ist; die äussere Kraft werde daher radial gerichtet vorausgesetzt und pro Volumeinheit mit R bezeichnet.

Von den 6 Gleichgewichtsbedingungen der auf das Körperelement wirkenden Kräfte (bezogen auf 3 Axen, die vom Schwerpunkte dieses Elements nach der Richtung a und nach den betreffenden Richtungen r und φ gezogen werden) liefern nur diejenigen nicht identische Gleichungen, welche ausdrücken, dass die Componentensummen der Kräfte nach den Richtungen a und r = Null sein müssen, und zwar:

$$\frac{d\sigma_a}{da} + \frac{1}{r}\frac{d(r\tau)}{dr} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \frac{\sigma_\varphi}{r} + \frac{d\tau}{da} + R = 0.$$

Wenn man in diesen Gleichungen, welche an die Stelle der allgemeinen Gleichungen (I) in Nr. 229 treten, den dortigen Gleichungen (VI) gemäss die Ausdrücke

$$\sigma_a = 2G\left(\frac{d\alpha}{da} + \frac{\mu}{m-2}\right) = \frac{2G}{m-2}\left[(m-1)\frac{d\alpha}{da} + \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r}\right]$$

$$\sigma_r = 2G\left(\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\mu}{m-2}\right) = \frac{2G}{m-2}\left[\frac{d\alpha}{da} + (m-1)\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r}\right]$$

$$\sigma_\varphi = 2G\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{\mu}{m-2}\right) = \frac{2G}{m-2}\left[\frac{d\alpha}{da} + \frac{d\varrho}{dr} + (m-1)\frac{\varrho}{r}\right]$$

$$\tau = G\left(\frac{d\alpha}{dr} + \frac{d\varrho}{da}\right)$$

einführt (τ ist dabei positiv oder negativ, jenachdem der Winkel an der Kante $O\Phi$ des Körperelementes Fig. 36 kleiner oder grösser, als ein rechter wird), so sind dadurch mit Berücksichtigung der Oberflächenbedingungen bei der Integration der Gleichungen die Grössen α und ϱ bestimmbar, folglich auch die Spannungen σ_a, σ_r, σ_φ und τ sowie endlich nach Nr. 231 die Hauptausdehnungen:

$$E\varepsilon_1 = \sigma_\varphi - \frac{\sigma_a + \sigma_r}{m}$$

$$E\begin{pmatrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix} = -\frac{1}{m}\sigma_\varphi + \frac{m-1}{2m}(\sigma_a+\sigma_r) \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_a-\sigma_r)^2 + 4\tau^2},$$

von denen die erste nach der Richtung φ stattfindet.

271. — Ist überall σ_a = Null, was voraussetzt, dass die äusseren Kräfte an der Oberfläche des Körpers senkrecht zur Axe gerichtet sind, so folgt aus den Gleichungen der vorigen Nr.:

$$\frac{d\alpha}{da} = -\frac{\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r}}{m-1}$$

$$\sigma_r = \frac{2G}{m-1}\left(m\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r}\right)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2G}{m-1}\left(\frac{d\varrho}{dr} + m\frac{\varrho}{r}\right)$$

$$\tau = G\left(\frac{d\alpha}{dr} + \frac{d\varrho}{da}\right).$$

Dabei sind α und ϱ bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{d(r\tau)}{dr} = 0;\ \frac{1}{r}\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \frac{\sigma_\varphi}{r} + \frac{d\tau}{da} + R = 0$$

in Verbindung mit den Oberflächenbedingungen, und schliesslich ist:

$$E\varepsilon_1 = \sigma_\varphi - \frac{1}{m}\sigma_r$$

$$E\begin{pmatrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix} = -\frac{1}{m}\sigma_\varphi + \frac{m-1}{2m}\sigma_r \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma_r^2 + 4\tau^2}.$$

a. Hohlcylinder bei gleichförmig vertheiltem Normaldrucke auf die innere und äussere Cylinderfläche.

1. Der Hohlcylinder ist an den Enden offen und frei.

272. — Indem auf den Rand des Hohlcylinders keine Kräfte wirken, auch diese Ränder ganz frei sein sollen, so dass alle Querschnitte sich in gleicher Weise erweitern oder zusammenziehen können, jenachdem der innere oder äussere Druck überwiegend ist, so ist hier nicht nur σ_a, sondern auch τ überall = Null;

$\sigma_a = 0$, σ_r, σ_φ sind also Hauptspannungen,

ε_a , ε_r, ε_φ Hauptausdehnungen

und zwar für alle Querschnitte gleich, nur abhängig von r.

Von den beiden Gleichgewichtsbedingungen (Nr. 271) wird die erste identisch, die zweite geht mit $R = 0$ über in:

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_\varphi = 0$$

und die Einführung der Ausdrücke von σ_r und σ_φ liefert durch eine erste Integration:

$$\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} = b = \text{Const.},$$

womit auch der Volumenausdehnungscoefficient

$$\mu = \frac{d\alpha}{da} + \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} = \frac{m-2}{m-1} b$$

constant wird. Die zweite Integration giebt, unter c eine andere Constante verstanden:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{b}{2} + \frac{c}{r^2}; \text{ also } \frac{d\varrho}{dr} = \frac{b}{2} - \frac{c}{r^2}$$

und durch Einführung in die Ausdrücke von σ_r und σ_φ:

$$\sigma_r = \frac{2G}{m-1}\left[(m+1)\frac{b}{2} - (m-1)\frac{c}{r^2}\right] = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2G}{m-1}\left[(m+1)\frac{b}{2} + (m-1)\frac{c}{r^2}\right] = A + \frac{B}{r^2},$$

sowie nach Nr. 229, Gl. (V):

$$E\varepsilon_a = -\frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{m} = -\frac{2}{m}A$$

$$\left.\begin{aligned} E\varepsilon_r &= \sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_\varphi \\ E\varepsilon_\varphi &= \sigma_\varphi - \frac{1}{m}\sigma_r \end{aligned}\right\} = \frac{m-1}{m}A \mp \frac{m+1}{m}\frac{B}{r^2}.$$

Die zur Abkürzung eingeführten neuen Constanten A und B sind, wenn
r_1 den inneren, r_2 den äusseren Radius,
p_1 „ „ p_2 „ „ Druck auf die Einheit der Oberfläche
bedeutet, dadurch bestimmt, dass

$\sigma_r = -p_1$ resp. $= -p_2$ sein muss für $r = r_1$ resp. r_2.

Somit erhält man:

$$A = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad B = (p_1 - p_2)\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \end{aligned}\right\} = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left[p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2 \mp (p_1 - p_2)\frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right]$$

$$E\varepsilon_a = -\frac{2}{m}\frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$\left.\begin{aligned} E\varepsilon_r \\ E\varepsilon_\varphi \end{aligned}\right\} = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left[\frac{m-1}{m}(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2) \mp \frac{m+1}{m}\frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right].$$

273. — Wenn die kleinere der beiden Pressungen p_1 und p_2 nicht wesentlich grösser, als der atmosphärische Druck ist (cf. Nr. 268), so ist für inneren Ueberdruck ($p_1 > p_2$) mit $p_2 = 0$ und $p_1 = p$:

$$E\varepsilon_a = -\frac{2}{m}\frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$E\varepsilon_r = -\frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_2^2}{r^2} - \frac{m-1}{m}\right)$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_2^2}{r^2} + \frac{m-1}{m}\right);$$

$$max.(-E\varepsilon_r) = p\frac{(m+1)r_2^2-(m-1)r_1^2}{m(r_2^2-r_1^2)} \text{ für } r=r_1 \text{ ist } > -E\varepsilon_a$$

$$max.(E\varepsilon_\varphi) = p\frac{(m+1)r_2^2+(m-1)r_1^2}{m(r_2^2-r_1^2)} \text{ für } r=r_1;$$

die grösste Anstrengung des Materials findet an der Innenfläche des Hohlcylinders statt.

$$max.(-E\varepsilon_r) = k'' \text{ entspricht } \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{mk''-(m-1)p}{mk''-(m+1)p}}$$

$$max.(E\varepsilon_\varphi) = k' \text{ entspricht } \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{mk'+(m-1)p}{mk'-(m+1)p}};$$

von diesen Werthen ist der erste oder zweite der grössere, also für die Bestimmung der Wandstärke $\delta = r_2 - r_1$ massgebende, jenachdem

$$k'' \gtrless \frac{k'}{m} + \frac{m^2-1}{m^2}p$$

ist. Mit $k' = k'' = k$ ist

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{mk+(m-1)p}{mk-(m+1)p}}$$

zu setzen; jedenfalls muss $p < \frac{m}{m+1}k$ sein. Ist aber $\frac{p}{k}$ ein kleiner Bruch, so kann gesetzt werden:

$$\frac{\delta}{r_1} = \frac{p}{k}\left(1+\frac{m+2}{2m}\frac{p}{k}\right).$$

274. — Für äusseren Ueberdruck ($p_2 > p_1$) ist mit $p_1 = 0$ und $p_2 = p$:

$$E\varepsilon_a = \frac{2}{m}\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}$$

$$E\varepsilon_r = \frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_1^2}{r^2}-\frac{m-1}{m}\right)$$

$$E\varepsilon_\varphi = -\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_1^2}{r^2}+\frac{m-1}{m}\right)$$

$$E\varepsilon_a = max.(E\varepsilon_r) = \frac{2}{m}\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2} \text{ für } r=r_1$$

$$max.(-E\varepsilon_\varphi) = 2\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2} \text{ für } r=r_1,$$

also wieder die Anstrengung des Materials an der Innenfläche des Hohlcylinders am grössten.

$Max.(-E\varepsilon_\varphi) = k''$ ist massgebend für die erforderliche Wandstärke $\delta = r_2 - r_1$, sofern nur $k' > \frac{k''}{m}$ ist; $max.(-E\varepsilon_\varphi) = k$ gesetzt giebt:

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{1-\frac{2p}{k}}$$

und näherungsweise, wenn $\frac{p}{k}$ ein kleiner Bruch ist:

$$\frac{\delta}{r_1} = \frac{p}{k}\left(1+\frac{3}{2}\frac{p}{k}\right).$$

275. — Die nach den Formeln der vorhergehenden Nummern berechneten Wanddicken von Röhren können bei mässigem Ueberdrucke kleiner ausfallen, als die Art des Materials mit Rücksicht auf die technische Herstellung oder die Forderung der Undurchdringlichkeit für tropfbare oder luftförmige Flüssigkeiten gestattet. Diese untere Grenze der zulässigen Wanddicke beträgt

für Röhren aus Kupfer und Messing etwa 1 Millim.
„ „ „ Blei, Zink und Stahl „ 2 „
„ „ „ Eisenblech . . . . . . „ 3 „
„ „ „ Gusseisen . . . . . . „ 5 „ ,

unter welche deshalb im Allgemeinen nicht hinabgegangen wird, wenn auch die betreffende Formel einen kleineren Werth ergeben sollte.

Weil ferner die Röhren zumeist noch anderweitigen Einwirkungen unterworfen sind, auf welche jene Formeln keine Rücksicht nehmen, wie z. B. der Verbiegung durch ihre eigene Schwere, besonders wenn sie nicht auf ihrer ganzen Länge, sondern nur in einzelnen Punkten unterstützt sind, so werden sogar gewöhnlich jene praktischen Grenzwerthe den berechneten Werthen von δ als constante Summanden zu grösserer Sicherheit beigefügt. Bei Röhren, welche einem äusseren Ueberdrucke unterworfen sind, kommt die Gefahr hinzu, dass bei zufälliger Abweichung des Querschnitts von der genauen Kreisform solche Abplattung zunimmt und schliesslich der Bruch durch Zerknickung herbeigeführt werden kann, ein Umstand, dessen rationelle Berücksichtigung auf ähnliche Schwierigkeiten führt, wie die Zerknickungsfestigkeit eines geraden Stabes.

Endlich ist noch zu bemerken, dass wesentlich andere Verhältnisse, als im Vorhergehenden vorausgesetzt wurden, dann eintreten müssen, wenn die Röhren an den Enden nicht frei sind, so dass sich nicht alle Querschnitte in gleichem Masse erweitern oder zusammenziehen können. Bis zu einem gewissen Grade ist dies z. B. schon dann der Fall, wenn die einzelnen Röhren einer Rohrleitung durch Flanschen mit einander verschraubt sind, noch mehr bei einer Röhre, die an den Enden durch Böden geschlossen ist, wie z. B. ein cylindrischer Dampfkessel; bei innerem Ueberdrucke findet dann eine Ausbauchung der Röhre, d. h. in der Mitte eine stärkere Erweiterung statt, als an den Enden. Die Längsfasern der Rohrwand werden also zugleich gebogen und es werden dadurch neue Ausdehnungen nach der Richtung der Axe bedingt, welche unter Umständen gefährlicher werden können, als die oben berechneten. Eine nähere Untersuchung dieses Falles enthalten die folgenden Nummern.

2. Der Hohlcylinder ist an den Enden festgeklemmt oder durch Böden geschlossen.

276. — Die strenge Untersuchung führt hier zu sehr grossen Schwierigkeiten, welche sich indessen durch einige zwar willkürliche, aber unbedenkliche Annahmen umgehen oder vermindern lassen, wenn die Wanddicke $\delta = r_2 - r_1$ sehr klein im Vergleich mit dem Durchmesser der Röhre ist, und zwar so klein, dass schon die erste Potenz des Verhältnisses beider gegen 1 vernachlässigt werden darf; auf diesen Fall und zwar bei innerem Ueberdrucke $= p$ pro Flächeneinheit beschränkt sich die folgende Untersuchung. Die radiale Spannung σ_r ist dann von untergeordneter Bedeutung im Vergleich mit den Spannungen σ_x und σ_φ

(ebenso wie bei einem dünnen Stabe, der durch eine stetig vertheilte Last transversal beschwert ist, die entsprechende transversale Pressung stets sehr klein ist im Vergleich mit den durch die Biegung bedingten Längenspannungen); wird deshalb

$$\sigma_r = 0$$

gesetzt, so ist analog den Ausdrücken von σ_r und σ_φ in Nr. 271, wenn hier x und ξ an die Stelle der in Nr. 270 erklärten Buchstaben a und α gesetzt werden:

$$\sigma_x = \frac{2G}{m-1}\left(m\frac{d\xi}{dx} + \frac{\varrho}{r}\right); \quad \sigma_\varphi = \frac{2G}{m-1}\left(\frac{d\xi}{dx} + m\frac{\varrho}{r}\right).$$

Mit r soll im Folgenden der ursprüngliche Radius der Mittelfläche des Hohlcylinders, mit ϱ die Verlängerung dieses Radius bezeichnet werden; wenn dann gleichwohl obige Ausdrücke von σ_x und σ_φ unverändert gelassen werden, so wird dadurch die Ausdehnung $\varepsilon_\varphi = \frac{\varrho}{r}$ als blosse Function von x, d. h. als constant für alle Punkte desselben ringförmigen Querschnitts in Rechnung gestellt. Ferner sei:

y die Entfernung eines Punktes von der mittleren Cylinderfläche, positiv nach Aussen, negativ nach Innen,

R der Krümmungsradius der Meridianlinie der verbogenen Mittelfläche,

$\varrho = f(x)$ die Gleichung dieser Meridianlinie, bezogen auf die entsprechende Seite der ursprünglich cylindrischen Mittelfläche als x-Axe (Fig. 37), während der Anfangspunkt O vorläufig unbestimmt bleiben möge.

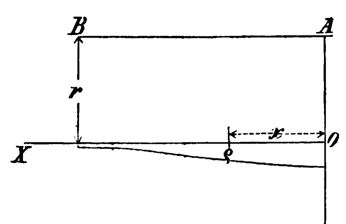


Fig. 37.

Bliebe der geometrische Ort der materiellen Punkte, welche ursprünglich in einem Radius lagen, auch bei der Deformation eine zur Mittelfläche senkrechte Gerade, so wäre, unter $\varepsilon_x{}^0$ die axiale Ausdehnung in der Mittelfläche verstanden,

$$\frac{d\xi}{dx} = \varepsilon_x = \varepsilon_x{}^0 \pm \frac{y}{R} \text{ (cf. Nr. 41),}$$

und zwar $\pm$, jenachdem der Krümmungsmittelpunkt nach der Seite der Cylinderaxe AB hin oder auf der anderen Seite liegt, jenachdem also näherungsweise

$$\frac{1}{R} = \mp \frac{d^2\varrho}{dx^2}$$

ist, womit für alle Fälle
$$\frac{d\xi}{dx} = \varepsilon_x{}^0 - y\,\frac{d^2\varrho}{dx^2}$$

wird; wenn auch diese Annahme wegen der Wirkung der Tangentialspannungen τ streng genommen nicht zutrifft, so lässt sich doch erwarten, dass sie ebensowenig ein wesentlich fehlerhaftes Resultat ergeben werde, als es sich bei der Biegung von stabförmigen Körpern unter **A.** dieses Capitels, verglichen mit den Untersuchungen des zweiten Capitels, gezeigt hat.

Wird dieser Werth von $\frac{d\xi}{dx}$ in die Ausdrücke von σ_x und σ_φ eingeführt, ferner $G = \frac{1}{2}\frac{m}{m+1}E$ gesetzt und $\varepsilon_x{}^0$ mit Rücksicht darauf bestimmt, dass in allen Punkten der Mittelfläche

$$\sigma_x{}^0 = \frac{P}{F} = \frac{P}{2\pi r\delta}$$

sein muss, wenn P die an den Enden auf den Rand des Hohlcylinders nach der Richtung der Axe im Allgemeinen wirkende Zugkraft ist, so ergiebt sich:

$$\varepsilon_x{}^0 = \frac{m^2-1}{m^2}\frac{P}{EF} - \frac{1}{m}\frac{\varrho}{r}$$

$$\sigma_x = \frac{P}{F} - \frac{m^2}{m^2-1}Ey\frac{d^2\varrho}{dx^2}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{m}\frac{P}{F} + E\frac{\varrho}{r} - \frac{m}{m^2-1}Ey\frac{d^2\varrho}{dx^2}.$$

Ist der Hohlcylinder durch Böden geschlossen, welche auch dem inneren Ueberdrucke p ausgesetzt sind, so ist:

$$\frac{P}{F} = \frac{pr}{2\delta}.$$

277. — Zur Bestimmung der Tangentialspannung τ kann nun die erste der beiden Gleichgewichtsbedingungen sub Nr. 270 dienen, nämlich die Gleichung:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{1}{r}\frac{d(r\tau)}{dy} = \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Ihre Integration liefert bei Einführung des zuvor gewonnenen Ausdrucks von σ_x und mit Rücksicht darauf, dass an den Oberflächen, d. h. für $y = \pm\frac{\delta}{2}$ die Spannung τ verschwinden muss:

$$\tau = -\frac{m^2}{m^2-1}E\frac{\delta^2-4y^2}{8}\frac{d^3\varrho}{dx^3}.$$

Die zweite jener Gleichgewichtsbedingungen, welche mit $\sigma_r = 0$ übergeht in:

$$\frac{\sigma_\varphi}{r} - \frac{d\tau}{dx} = R,$$

ist endlich zur Bestimmung der in den Ausdrücken von σ_x, σ_φ und τ vorkommenden Function ϱ, d. h. zur Bestimmung der Gleichung $\varrho = f(x)$ der Meridianlinie der verbogenen Mittelfläche disponibel geblieben. Diese Gleichung, welche dadurch entstanden ist, dass die algebraische Summe der nach radialer Richtung auf das Volumenelement $= r\,dx\,dy\,d\varphi$ (Fig. 36) wirkenden Kräfte = Null gesetzt und dann durch den Inhalt dieses Volumenelements dividirt wurde, hat indessen mit der Voraussetzung $\sigma_r = 0$ ihre Berechtigung verloren; um ihr dieselbe wieder zu geben, muss sie mit dem Volumenelement wieder multiplicirt, nach y von $-\frac{\delta}{2}$ bis $+\frac{\delta}{2}$ inte-

grirt, d. h. auf ein **aus der ganzen Dicke** der cylindrischen Wand herausgeschnittenes Element ausgedehnt, und endlich statt des Gliedes mit R (da auf die Masse selbst eine bewegende Kraft nicht wirken soll) der Ueberdruck $= p\,r\,dx\,d\varphi$ auf die Innenfläche dieses Elements gesetzt werden. So ergiebt sich mit Rücksicht auf die obigen Ausdrücke von σ_φ und τ die Gleichung:

$$\frac{d^4\varrho}{dx^4} + 12\frac{m^2-1}{m^2}\frac{\varrho}{r^2\delta^2} = 12\frac{m^2-1}{m^2}\frac{1}{E\delta^3}\left(p - \frac{1}{m}\frac{P}{F}\frac{\delta}{r}\right),$$

welche durch die Substitution:

$$\varrho = \frac{r^2}{E\delta}\left(p - \frac{1}{m}\frac{P}{F}\frac{\delta}{r}\right) + z = A + z$$

auf die einfachere Form gebracht wird:

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + 12\frac{m^2-1}{m^2}\frac{z}{r^2\delta^2} = 0$$

$$\text{oder } \frac{d^4 z}{dx^4} + 4a^4 z = 0 \text{ mit } a = \sqrt[4]{\frac{3(m^2-1)}{m^2 r^2 \delta^2}}.$$

Bei der geschlossenen Röhre ist mit $\frac{P}{F} = \frac{pr}{2\delta}$ (Nr. 276) insbesondere:

$$A = \frac{2m-1}{2m}\frac{pr^2}{E\delta}.$$

278. — Der Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + 4a^4 z = 0$$

entspricht das allgemeine Integral:

$$z = C_1 e^{n_1 x} + C_2 e^{n_2 x} + C_3 e^{n_3 x} + C_4 e^{n_4 x},$$

unter e die Basis der natürlichen Logarithmen,

C_1, C_2, C_3, C_4 Constante, und unter

n_1, n_2, n_3, n_4 die Wurzeln der Gleichung:

$$n^4 + 4a^4 = 0$$

verstanden, nämlich:

$$\left.\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}\right\} = a(1 \pm \sqrt{-1}); \quad \left.\begin{matrix} n_3 \\ n_4 \end{matrix}\right\} = a(-1 \pm \sqrt{-1}).$$

Durch Einführung neuer Constanten f, g, f_1 und g_1, welche mit den alten durch die Gleichungen

$$f = C_1 + C_2\ ; \quad g = (C_1 - C_2)\sqrt{-1}$$
$$f_1 = C_3 + C_4\ ; \quad g_1 = (C_3 - C_4)\sqrt{-1}$$

verbunden sind, lässt sich die imaginäre Form des Integrals in die reelle Form:

$$z = e^{ax}\left[f\cos(ax) + g\sin(ax)\right] + e^{-ax}\left[f_1\cos(ax) + g_1\sin(ax)\right]$$

verwandeln. Die Constanten sind durch die Verhältnisse bestimmt, in welchen die Enden des Hohlcylinders sich befinden. Wenn insbesondere **beide Enden denselben Bedingungen unterworfen** sind, so dass eine in Beziehung auf die mittlere Querschnittsebene symmetrische Verbie-

gung stattfindet, so muss, wenn noch der Anfangspunkt O der x-Axe in diesen mittleren Querschnitt gelegt wird (Fig. 37), für $x = 0$ sein:

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } \tau = 0 \text{ für jedes } y, \text{ also } \frac{d^3\varrho}{dx^3} = \frac{d^3z}{dx^3} = 0.$$

Diese Bedingungen ergeben:

$$f_1 = f \text{ und } g_1 = -g$$

und damit:

$$\varrho = A + z = A + f\,(e^{ax} + e^{-ax}) \cos(ax) + g\,(e^{ax} - e^{-ax}) \sin(ax).$$

Zur vollständigen Bestimmung der Aufgabe werde endlich noch angenommen, die Röhre sei an den Enden so festgehalten, dass weder eine Erweiterung des Querschnitts, noch eine Neigung der Meridianlinie der Mittelfläche gegen die Axe daselbst möglich, dass also, unter l die halbe Länge der Röhre verstanden,

$$\text{für } x = l: \quad \varrho = 0 \text{ und } \frac{d\varrho}{dx} = 0$$

ist. Die entsprechende Bestimmung der noch übrigen Constanten f und g lässt sich dann durch die Bemerkung vereinfachen, dass immer, sofern nur nicht etwa l viel kleiner als r ist, e^{-al} als sehr klein gegen e^{al} vernachlässigt werden kann*). Mit dieser Vernachlässigung erhält man:

$$f = -A\,\frac{\cos(al) + \sin(al)}{e^{al}}; \quad g = A\,\frac{\cos(al) - \sin(al)}{e^{al}}$$

$$\varrho = A\left\{1 - [\cos(al) + \sin(al)]\,\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{al}}\cos(ax) + [\cos(al) - \sin(al)]\,\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{al}}\sin(ax)\right\}.$$

279. — Mit Rücksicht auf die Art der Verbiegung der Mittelfläche des Hohlcylinders lassen die Ausdrücke von σ_x, σ_φ und τ in Nr. 276 und 277 erkennen, dass die grössten Absolutwerthe

von σ_x für $x = 0$, $y = \frac{\delta}{2}$ und $x = l$, $y = -\frac{\delta}{2}$,

von σ_φ für $x = 0$, $y = \frac{\delta}{2}$,

von τ für $x = l$, $y = 0$ stattfinden. Zur Berechnung dieser Maximalwerthe, an deren Oertern auch der grösste Absolutwerth der resultirenden

*) Mit $m = 3$ findet man z. B.

$$al = l\sqrt[4]{\frac{3\,(m^2-1)}{m^2 r^2 \delta^2}} = 4\,\frac{l}{r} \text{ für } \delta = \frac{r}{9{,}8},$$

somit $e^{al} = 54{,}6$ etwa 2981 Mal so gross, als $e^{-al} = \frac{1}{54{,}6}$, wenn auch nur $l = r$ gesetzt wird. Wäre $\delta < \frac{r}{10}$ oder $l > r$, so wäre die fragliche Vernachlässigung in noch höherem Grade gerechtfertigt.

Ausdehnung ε nach irgend einer Richtung zu suchen ist, bedarf es nur der Kenntniss von ϱ, $\frac{d^2\varrho}{dx^2}$ und $\frac{d^3\varrho}{dx^3}$ für $x=0$ und $x=l$. Werden diese Specialwerthe entsprechend $x=0$ und $x=l$ durch die Zeiger 0 und 1 angedeutet, so hat man, wenn zur Abkürzung

$$2\frac{\cos(al)+\sin(al)}{e^{al}}=\alpha;\quad 2\frac{\cos(al)-\sin(al)}{e^{al}}=\beta$$

$$\sqrt[4]{\frac{3(m^2-1)}{m^2}}=n,\quad \text{also } a=\frac{n}{\sqrt{r\delta}}$$

gesetzt wird:

$$\varrho_0=A(1-\alpha);\qquad \varrho_1=0$$

$$\left(\frac{d^2\varrho}{dx^2}\right)_0=\frac{2n^2}{r\delta}A\beta;\quad \left(\frac{d^2\varrho}{dx^2}\right)_1=\frac{2n^2}{r\delta}A$$

$$\left(\frac{d^3\varrho}{dx^3}\right)_0=0;\qquad \left(\frac{d^3\varrho}{dx^3}\right)_1=\frac{4n^3}{r\delta\sqrt{r\delta}}A.$$

Die Verbiegung der Röhre findet nothwendig in solcher Weise statt, dass sich in der Mitte ein Bauch bildet, dass also $\left(\frac{d^2\varrho}{dx^2}\right)_0$ positiv ist; weil aber β je nach der zufälligen Grösse von al positiv oder negativ sein könnte, so muss man schliessen, dass obige Werthe nur für solche Fälle näherungsweise gelten können, in welchen

$$al=\frac{nl}{\sqrt{r\delta}}$$

gross genug ist, um e^{-al} nicht nur gegen e^{al}, sondern selbst gegen 1 vernachlässigen, mithin auch α und $\beta=0$ setzen zu dürfen. Bei einem cylindrischen Dampfkessel z. B. liegen solche Verhältnisse jedenfalls vor.

280. — Es werde jetzt insbesondere ein an den Enden geschlossener Hohlcylinder vorausgesetzt, in welchem sich, wie bei einem Dampfkessel, eine Flüssigkeit befindet, die auf die Flächeneinheit der ganzen Innenfläche den Ueberdruck p ausübt. Dann ist nach Nr. 276, 277 und 279 mit $\alpha=\beta=0$:

$$E\varepsilon_x=\frac{m^2-1}{m^2}\frac{pr}{2\delta}-\frac{E\varrho}{mr}-y\,E\frac{d^2\varrho}{dx^2};\quad E\varepsilon_\varphi=\frac{E\varrho}{r}$$

$$\sigma_x=\frac{pr}{2\delta}-\frac{m^2}{m^2-1}y\,E\frac{d^2\varrho}{dx^2}$$

$$\sigma_\varphi=\frac{pr}{2m\delta}+\frac{E\varrho}{r}-\frac{m}{m^2-1}y\,E\frac{d^2\varrho}{dx^2}$$

$$\tau=-\frac{m^2}{m^2-1}\frac{\delta^2-4y^2}{8}E\frac{d^3\varrho}{dx^3}$$

$$E\varrho_0=\frac{2m-1}{2m}\frac{pr^2}{\delta};\quad E\varrho_1=0$$

$$\left.\begin{aligned}E\left(\frac{d^2\varrho}{dx^2}\right)_0&=0;\quad E\left(\frac{d^2\varrho}{dx^2}\right)_1=2n^2\frac{2m-1}{2m}\frac{pr}{\delta^2}\\ E\left(\frac{d^3\varrho}{dx^3}\right)_0&=0;\quad E\left(\frac{d^3\varrho}{dx^3}\right)_1=4n^3\frac{2m-1}{2m}\frac{pr}{\delta^2\sqrt{r\delta}}\end{aligned}\right\}\ n=\sqrt[4]{\frac{3(m^2-1)}{m^2}}.$$

Der $= k$ zu setzende grösste Absolutwerth von $E\varepsilon$ ist nur im mittleren und im Endquerschnitte, d. h. für $x = 0$ und $x = l$, zu suchen. Im ersteren ist $\tau = 0$, und sind deshalb ε_x und ε_φ Hauptausdehnungen:

$$max.\,(E\varepsilon_x)_0 = \frac{m-2}{2m}\,\frac{pr}{\delta} \text{ für } y = \frac{\delta}{2}$$

$$(E\varepsilon_\varphi)_0 = \frac{2m-1}{2m}\,\frac{pr}{\delta}.$$

Im Endquerschnitte sind für $y = \pm\frac{\delta}{2}$ wegen $\tau = 0$ auch ε_x und ε_φ Hauptausdehnungen, und zwar $\varepsilon_\varphi = 0$, dagegen:

$$max.\,(E\varepsilon_x)_1 = \frac{m^2-1+(2m-1)\sqrt{3(m^2-1)}}{2m^2}\,\frac{pr}{\delta} \text{ für } y = -\frac{\delta}{2}.$$

Endlich sind noch die Punkte der Mittellinie ($y = 0$) des Endquerschnitts als relativ gefährliche Punkte in Betracht zu ziehen, indem daselbst τ am grössten ist; die Einführung der entsprechenden Werthe von σ_x, σ_φ und τ (nebst $\sigma_r = 0$) in die allgemeinen Formeln für die Hauptausdehnungen sub Nr. 270 ergiebt den absolut grössten Werth von $E\varepsilon$ an dieser Stelle:

$$max.\,(E\varepsilon^0)_1 = \frac{1}{4m^2}\left[m^2-m-2+m(m+1)\sqrt{1+\frac{3(2m-1)^2\sqrt{3(m^2-1)}}{m(m^2-1)}\,\frac{\delta}{r}}\,\right]\frac{pr}{\delta}.$$

Die Vergleichung dieser 4 relativ grössten Werthe von $E\varepsilon$ lässt erkennen, dass sie in folgender Grössenbeziehung stehen:

$$max.\,(E\varepsilon_x)_0 < (E\varepsilon_\varphi)_0 < max.\,(E\varepsilon_x)_1 > max.\,(E\varepsilon^0)_1.$$

Die gefährlichste Wirkung, d. h. die grösste Ausdehnung oder Zusammenziehung, findet sonach an der Innenfläche der cylindrischen Wand unmittelbar am Ende der Röhre statt, und wenn dies absolute Maximum von $E\varepsilon = k$ gesetzt wird, ergiebt sich für die erforderliche Wandstärke δ die Formel:

$$\frac{\delta}{r} = \frac{m^2-1+(2m-1)\sqrt{3(m^2-1)}}{2m^2}\,\frac{p}{k}.$$

Mit $m = 3$ findet man z. B:

$$max.\,(E\varepsilon_x)_0 = \frac{1}{6}\,\frac{pr}{\delta};\quad (E\varepsilon_\varphi)_0 = \frac{5}{6}\,\frac{pr}{\delta}$$

$$max.\,(E\varepsilon_x)_1 = 1{,}805\,\frac{pr}{\delta};\quad max.\,(E\varepsilon^0)_1 = \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\sqrt{1+15{,}3\,\frac{\delta}{r}}\right)\frac{pr}{\delta}.$$

Mit $m = 4$ ist übrigens das absolute Maximum noch grösser, nämlich:

$$max.\,(E\varepsilon_x)_1 = 1{,}936\,\frac{pr}{\delta},$$

mithin fast doppelt so gross, als für die offene Röhre unter sonst gleichen Umständen (Nr. 273), und mehr wie doppelt so gross, als sich für die geschlossene Röhre ohne Rücksicht auf die Verbiegung ergeben würde, in

welchem Falle nämlich der Maximalwerth von $E\varepsilon$ = dem obigen $(E\varepsilon_\varphi)_0$ gefunden wird.*)

281. — Blechstärke cylindrischer Dampfkessel.

Ist d der Durchmesser des Kessels in Centimetern, n der innere Ueberdruck in Atmosphären, so folgt aus der Gleichung:

$$1{,}936\frac{pr}{\delta} = k \text{ (Nr. 280)}$$

mit $r = \frac{d}{2}$ und $p = \frac{31}{30}n$ (eine Atmosphäre = 1,0333 = $\frac{31}{30}$ Kilogr. pro Quadratcentimeter):

$$\frac{\delta}{d} = \frac{n}{k}.$$

Mit einem constanten Werthe von k würde diese Formel indessen für kleine Werthe von n unausführbar kleine und ausserdem schon wegen des Eigengewichts und des Gewichts der Wasserfüllung jedenfalls zu kleine Werthe von δ ergeben, weshalb besser

$$\frac{\delta}{d} = an + b$$

gesetzt wird, unter Vorbehalt erfahrungsmässig angemessener Bestimmung der Constanten a und b.

---

*) Die diesen Rechnungsresultaten zu Grunde liegende Voraussetzung, dass für $x = l$, d. h. am Ende der Röhre

$$\varrho = 0 \text{ und } \frac{d\varrho}{dx} = 0$$

ist, welcher Voraussetzung entsprechend in Nr. 278 die Constanten f und g in der Gleichung der Meridianlinie der verbogenen Mittelfläche bestimmt wurden, trifft bei der durch Böden geschlossenen Röhre nur näherungsweise zu und zwar um so mehr, je grösser die Dicke und je kleiner mithin die eigene Verbiegung und Ausdehnung dieser Böden ist. Streng genommen bedingen die Deformationen der cylindrischen Rohrwand und der abschliessenden Böden sich gegenseitig; wenn angenommen wird, dass die gegenseitige Verbindung beider Theile eine der Art feste ist, um den Neigungswinkel der mittleren Bodenfläche an ihrem Rande gegen die Mittelfläche der ursprünglich cylindrischen Wand als unveränderlich betrachten zu dürfen, so müsste die Vergrösserung des Umfangsradius der ersteren

$$= \varrho = \frac{2m-1}{2m}\frac{pr^2}{E\delta} + f(e^{ax} + e^{-ax})\cos(ax) + g(e^{ax} - e^{-ax})\sin(ax)$$

(Nr. 278) für $x = l$, sowie die Neigung der Bodenfläche gegen ihre ursprüngliche Richtung am Rande $= \frac{d\varrho}{dx}$ für $x = l$ gesetzt werden, um die erforderlichen Bestimmungsgleichungen der Constanten f und g zu erhalten. Um aber die radiale Ausdehnung und die Neigung am Umfange der Bodenplatte ausdrücken zu können, müsste die vollständige Untersuchung der Deformation dieser Platte vorausgeschickt werden, welche nicht nur von ihrer Dicke, ihrer ursprünglichen Gestalt und von dem Ueberdrucke p auf die Einheit ihrer inneren Fläche, sondern ausserdem von dem Moment und der radialen Kraft abhängt, womit die Röhre auf jedes Bogenelement des Umfangs des Plattenrandes einwirkt; dieses Moment und diese Kraft liessen sich ausdrücken durch die Spannungen σ_x und τ im Endquerschnitte der Röhre, welche selbst zugleich mit ϱ noch Functionen der zu bestimmenden Constanten f und g wären. Die Umständlichkeit eines solchen Rechnungsganges stände indessen mit dem dadurch zu erzielenden zweifelhaften praktischen Gewinne kaum in Verhältniss, und ausserdem stellen sich seiner Durchführung, wenn, wie bei Dampfkesseln gerade vorwiegend der Fall ist, die Böden schon ursprünglich gewölbt sind, kaum überwindliche Schwierigkeiten entgegen.

Wird zu dem Ende mit Redtenbacher:

$$\delta = 0{,}5 \text{ für } n = 0 \text{ und } d = 100$$

gesetzt, d. h. eine Blechstärke von 5 Millim. als eine solche erachtet, welche einem Kessel von 1 Meter Durchmesser schon mit Rücksicht auf die praktische Herstellung sowie auf die anstrengende Wirkung des Eigengewichts und des Gewichts der Wasserfüllung zu geben wäre, und wird ferner die Thatsache zu Grunde gelegt, dass bei Locomotivkesseln

$$\delta = 1{,}2 \text{ bei durchschnittlich } n = 5 \text{ und } d = 100$$

ein erfahrungsmässig angemessener Werth ist, so sind durch diese zwei Werthsysteme von δ, n und d die Constanten a und b bestimmt, und ergiebt sich für alle Fälle (Eisenblech als Material vorausgesetzt):

$$\frac{\delta}{d} = 0{,}0014n + 0{,}005.$$

Hiernach wäre, abgesehen von der Schwächung des Blechs durch die Niete, sowie abgesehen von dem besonders bei kleineren Werthen von n verhältnissmässig grösseren Einflusse des Eigengewichts und des Gewichts der Wasserfüllung:

$$\text{für } n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

$$k = n\frac{d}{\delta} = 156 \quad 256 \quad 326 \quad 377 \quad 417 \quad 448.$$

In Preussen war vorgeschrieben:

$$\delta = 0{,}0015nd + 0{,}26 \text{ Centim.},$$

in Frankreich gilt die Regel:

$$\delta = 0{,}0018nd + 0{,}3 \text{ Centim.}$$

Diese Formeln unterscheiden sich von der obigen hauptsächlich dadurch, dass dem Ausdrucke von δ statt eines mit d wachsenden Summanden ein constanter Summand beigefügt ist, was indessen weniger rationell erscheint; denn auch ohne inneren Ueberdruck, blos wegen der Belastung durch das eigene und das Gewicht der Wasserfüllung, muss das Blech um so stärker genommen werden, je grösser der Durchmesser des Kessels ist.

282. — Wenn eine geschlossene oder durch Befestigung an den Enden in ihrer Deformation beschränkte Röhre einem äusseren Ueberdrucke ausgesetzt ist, wie z. B. die innere Heizröhre eines Dampfkessels, so tritt an die Stelle der Ausbauchung in der Mitte eine Einschnürung; ausserdem findet aber der wesentliche Unterschied statt, dass, während zufällige Abweichungen von der genauen Kreisform des Querschnitts durch inneren Druck vermindert werden, ein äusserer Druck sie umgekehrt vergrössert. Solche Abweichungen von der genauen Kreisform sind besonders bei Röhren, welche, wie die Heizröhren von Dampfkesseln, aus Blechtafeln zusammengenietet werden, kaum vermeidlich, und es sind daher solche Röhren der Gefahr ausgesetzt, durch den äusseren Ueberdruck platt gedrückt, resp. infolge solcher Verbiegung zerknickt zu werden. Es lässt sich erwarten und wird durch die Erfahrung bestätigt, dass diese Gefahr unter übrigens gleichen Umständen mit der Länge der Röhre wächst; eine rationelle Formel für die nöthige Wandstärke müsste also ausser dem Ueberdrucke und dem Durchmesser auch diese Länge enthalten. Die theoretische Ableitung einer solchen Formel würde jedoch auf sehr grosse Schwierigkeiten führen, und es sind deshalb Versuche, welche die Bildung einer empirischen Formel gestatten, hier von besonderem Werthe.

Dergleichen Versuche sind von W. Fairbairn mit Röhren von 10 bis 48 Centim. Durchmesser und 48 bis 155 Centim. Länge angestellt worden, welche auf gewöhnliche Art aus Eisenblech zusammengenietet waren. Leider hatte das Blech in den meisten Fällen die geringe Dicke von 1,1 Millimeter, während nur 4 Versuche mit Blechstärken von 3,2 bis 6,4 Millim. vorliegen; der Einfluss der Blechstärke konnte deshalb nicht so zuverlässig hervortreten, als wünschenswerth gewesen wäre. Die Röhren waren an den Enden durch starke gusseiserne Scheiben geschlossen, welche (entsprechend dem Zustande, in dem sich die Heizröhren von Dampfkesseln befinden) an ihrer gegenseitigen Annäherung infolge der Zusammendrückung der Röhre gehindert waren; durch ein engeres Rohr, welches in eine der Endscheiben eingefügt war, communicirte der innere Raum der Versuchsröhre mit der Atmosphäre, während der durch Wasser vermittels einer Druckpumpe hervorgebrachte äussere Druck bis zur Zerstörung der Versuchsröhre allmählig gesteigert wurde.

Aus den Resultaten von im Ganzen 21 Versuchen wurde mittels der Methode der kleinsten Quadrate vom Verfasser die folgende empirische Formel abgeleitet:*)

$$n = 7790 \frac{\delta^{2,316}}{l d^{1,278}}.$$

Darin bedeutet:

l die Länge in Centimetern,
d den Durchmesser in Centimetern,
δ die Blechstärke in Millimetern,
n den Ueberdruck in Atmosphären, durch welchen die Röhre zerdrückt wird.

Weil indessen diese Formel die mit der kleinen Blechdicke von 1,1 Millim. anangestellten Versuche zwar gut, die für die praktische Anwendung wichtigeren Versuche mit dickerem Blech indessen nicht genügend wiedergiebt, so wurde noch eine zweite Formel hergestellt, welche den letzteren Versuchen genau entspricht; sie ist bei derselben Bedeutung der Buchstaben wie oben:

$$n = 325 \frac{\delta^{2,081}}{l^{0,564} \cdot d^{0,889}}.$$

Diese Formeln sind vorläufig nur als Nothbehelf zu betrachten; je schwieriger dergleichen Versuche anzustellen sind und je mehr dabei zufällige Umstände einwirken können, desto mehr ist ihre Vervielfältigung nöthig, um das Gesetz des Widerstandes äusserlich gedrückter Röhren mit Zuverlässigkeit erkennbar zu machen. Unzweifelhaft ergiebt sich aber die Thatsache, dass mit zunehmender Länge die Widerstandsfähigkeit solcher Röhren wesentlich abnimmt, und es wurde deshalb von Fairbairn empfohlen, die Heizröhren der Dampfkessel mit einigen starken Ringen aus Winkeleisen zu umgeben, um sie so gewissermassen in mehrere Röhren von geringerer Länge abzutheilen.**)

---

*) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. III, p. 234, woselbst die Formeln in englischem Mass und Gewicht entwickelt sind.

**) Fairbairn hat auch einige Zerreissungsversuche mit cylindrischen Röhren ausgeführt, welche einem inneren Ueberdrucke ausgesetzt waren; dass sich dabei kein wesentlicher Einfluss der Länge herausgestellt hat, kann bei den gänzlich verschiedenen Umständen nicht befremden.

b. Kreisförmige ebene Platte.

283. — Der äussere Radius der Platte sei $= r$, die gleichförmige und im Vergleich mit r sehr kleine Dicke $= h$. Am Rande liege die Platte entweder ringsum lose auf, oder sie sei daselbst eingeklemmt. Die symmetrische Belastung bestehe im Allgemeinen aus

1) einer im Mittelpunkte concentrirten und senkrecht zur Oberfläche gerichteten Kraft P,
2) einem gleichförmig auf dieser Oberfläche vertheilten Normaldrucke $= p$ pro Flächeneinheit,
3) einer auf den Rand (die cylindrische Umfläche) gleichförmig vertheilten, radial wirkenden äusseren Kraft $= p_1$ pro Flächeneinheit, also $= p_1 h$ pro Längeneinheit des Umfangs.

Ein positiver Werth von P entspreche der gleichen Richtung mit p, ein positiver Werth von p_1 entspreche einem radial auswärts gerichteten Zuge.

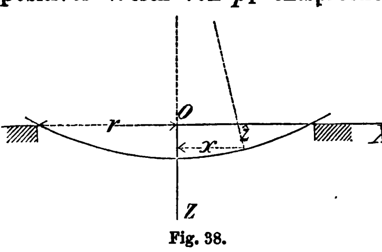


Fig. 38.

Die verbogene Mittelfläche ist eine Umdrehungsfläche, also bestimmt durch ihre Meridianlinie; letztere (Fig. 38) sei bezogen auf die Coordinatenaxen OX, OZ, deren Anfangspunkt O im Mittelpunkte der noch nicht gebogenen Mittelfläche liegt, während OX radial gerichtet und OZ (positiv nach der Richtung des Ueberdruckes p) die geometrische Axe der Platte ist.

Wenn die Spannung σ_z als sehr klein gegen σ_x und σ_φ vernachlässigt wird (ebenso wie σ_r in Nr. 276), so ist nach Nr. 271 (mit x statt r):

$$\sigma_x = \frac{2G}{m-1}(m\varepsilon_x + \varepsilon_\varphi); \quad \sigma_\varphi = \frac{2G}{m-1}(\varepsilon_x + m\varepsilon_\varphi).$$

Wird ferner wieder mit y (positiv nach der Richtung der positiven z-Axe) die Entfernung eines beliebigen Punktes der Platte von ihrer Mittelfläche bezeichnet und angenommen, dass eine ursprünglich zur Mittelfläche senkrechte materielle Gerade auch bei der Biegung diese Eigenschaft behalte (cf. Nr. 276), so ist, unter

R den Krümmungsradius der Meridianlinie und unter

R_1 den Krümmungsradius des dazu senkrechten Normalschnitts der Mittelfläche (= der Normale der Meridianlinie, bis zum Schnittpunkte mit der z-Axe gerechnet) verstanden:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x{}^0 \pm \frac{y}{R} = \varepsilon_x{}^0 - y\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi{}^0 \pm \frac{y}{R_1} = \varepsilon_\varphi{}^0 - \frac{y}{x}\frac{dz}{dx},$$

vorausgesetzt, dass die Biegung sehr gering ist, so dass R und R_1 im Vergleich mit den Dimensionen der Platte sehr gross sind; $\varepsilon_x{}^0$ und $\varepsilon_\varphi{}^0$ sind

dabei die Ausdehnungen der Mittelfläche nach den Richtungen x und φ. Die Einführung dieser Werthe giebt mit $G = \frac{1}{2}\frac{m}{m+1}E$:

$$\sigma_x = \frac{mE}{m^2-1}\left[m\varepsilon_x{}^0 + \varepsilon_\varphi{}^0 - y\left(m\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right)\right]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{mE}{m^2-1}\left[\varepsilon_x{}^0 + m\varepsilon_\varphi{}^0 - y\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dz}{dx}\right)\right].$$

Für $y = 0$, d. h. in der Mittelfläche, sind diese hier mit $\sigma_x{}^0$ und $\sigma_\varphi{}^0$ zu bezeichnenden Spannungen eben so gross, wie sie für jeden Werth von y sein würden, wenn die biegenden Kräfte P und p = Null wären und nur die radiale Kraft p_1 auf den Rand der Platte wirkte; dann wäre aber offenbar keine Tangentialspannung vorhanden und deshalb den allgemeinen Gleichungen (I) in Nr. 229 zufolge (bei dem Fehlen äusserer Kräfte, die auf die Masse selbst wirken) die Normalspannung σ von irgend einem Punkte aus nach irgend einer Richtung hin constant. Die somit einzeln constanten Spannungen $\sigma_x{}^0$ und $\sigma_\varphi{}^0$ sind aber unter sich gleich, weil sie im Mittelpunkte der Platte (für $x = 0$) sich nicht unterscheiden können,*) und weil wegen der Randbedingung $\sigma_x{}^0 = p_1$ ist, so ist auch

$$\sigma_x{}^0 = \sigma_\varphi{}^0 = p_1.$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf die obigen Ausdrücke von σ_x und σ_φ:

$$\varepsilon_x{}^0 = \varepsilon_\varphi{}^0 = \frac{m-1}{m}\frac{p_1}{E}$$

und somit:

$$\varepsilon_x = \frac{m-1}{m}\frac{p_1}{E} - y\frac{d^2z}{dx^2} \qquad \sigma_x = p_1 - \frac{m}{m^2-1}Ey\left(m\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{m-1}{m}\frac{p_1}{E} - \frac{y}{x}\frac{dz}{dx} \qquad \sigma_\varphi = p_1 - \frac{m}{m^2-1}Ey\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dz}{dx}\right).$$

284. — Zur Bestimmung der Tangentialspannung τ dient die zweite der beiden Gleichgewichtsbedingungen in Nr. 270:

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{d\tau}{dy} = \frac{\sigma_\varphi}{x} - \frac{1}{x}\frac{d(x\sigma_x)}{dx}.$$

Ihre Integration liefert mit Hülfe der obigen Ausdrücke von σ_x und σ_φ, sowie mit Rücksicht darauf, dass $\tau = 0$ ist für $y = \pm\frac{h}{2}$:

$$\tau = -\frac{m^2}{m^2-1}E\frac{h^2-4y^2}{8}\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx}\right).$$

Einer Bemerkung in Nr. 270 zufolge wird τ hier negativ gefunden, weil der rechte Winkel, den zwei von irgend einem Punkte aus nach den Richtungen x und z gezogene materielle Gerade bildeten, durch die Deformation der Platte in einen stumpfen Winkel übergeht.

---

*) Nach der zweiten der beiden Gleichgewichtsbedingungen in Nr. 270 ergiebt sich auch sofort mit $R = 0$ und $\tau = 0$ für jeden Punkt:

$$\sigma_\varphi{}^0 = \frac{d(x\sigma_x{}^0)}{dx} = \sigma_x{}^0.$$

In den Ausdrücken von σ_x, σ_φ und τ bleibt noch die Function z, d. h. die Gleichung der Meridianlinie der gebogenen Mittelfläche zu bestimmen. Die erste der beiden Gleichgewichtsbedingungen in Nr. 270 kann dazu nicht dienen, weil sie mit der Vernachlässigung von σ_z ihre Bedeutung verloren hat; dagegen lässt sie sich ersetzen durch die Bedingung des Gleichgewichts zwischen der äusseren Belastung und den Tangentialspannungen am Rande eines Plattenelements von endlicher Grösse, welches nämlich aus der Platte herausgeschnitten wird durch eine um die z-Axe mit dem Radius x beschriebene Cylinderfläche. So erhält man, unter τ hinfort den Absolutwerth der Tangentialspannung verstanden, die Bestimmungsgleichung:

$$2\pi x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau dy = \pi x^2 p + P;$$

ihre Combination mit obigem Ausdrucke von τ liefert:

$$\tau = \frac{3}{4}\frac{h^2-4y^2}{h^3}\left(px + \frac{P}{\pi x}\right)$$

und als Differentialgleichung der Meridianlinie:

$$\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx} = \frac{m^2-1}{m^2}\frac{6}{Eh^3}\left(px + \frac{P}{\pi x}\right).$$

Ihre Integration*) giebt, wenn zur Abkürzung

$$a = \frac{m^2-1}{m^2}\frac{6}{Eh^3}p; \quad b = \frac{m^2-1}{m^2}\frac{6}{Eh^3}\frac{P}{\pi}$$

gesetzt wird:

$$z = \frac{ax^4}{32} + \frac{bx^2}{4}(lnx - 1) + \frac{cx^2}{4} + d\,lnx + e$$

$$\frac{1}{x}\frac{dz}{dx} = \frac{ax^2}{8} + \frac{b}{2}\left(lnx - \frac{1}{2}\right) + \frac{c}{2} + \frac{d}{x^2}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{3}{8}ax^2 + \frac{b}{2}\left(lnx + \frac{1}{2}\right) + \frac{c}{2} - \frac{d}{x^2};$$

von den Integrations-Constanten c, d und e ist die letzte durch die Lage des Anfangspunktes, der die zusammengehörigen Werthe $x = r$, $z = 0$ entsprechen, bestimmt; die Constante d ist verschieden, je nachdem die Platte voll oder in der Mitte durch eine kreisförmige Oeffnung unterbrochen ist; die Constante c endlich ist von der Art der Unterstützung oder Befestigung der Platte am äusseren Rande abhängig.

*) Wobei zu beachten, dass

$$\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right)$$

und $\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dz}{dx}\right)$ ist.

1. Volle Platte.

285. — Die volle Platte kann nur so gebogen sein, dass die Meridianlinie der Mittelfläche für $x=0$ eine der x-Axe parallele Tangente hat, dass also

$$\text{für } x=0: \ \frac{dz}{dx}=0.ln0+\frac{d}{0}=0$$

ist, was nur dadurch möglich ist, dass $d=0$ gesetzt wird.*)

Wenn ferner die Platte am Rande lose aufliegt, so muss für $x=r$ und jedes y: $\sigma_x=\sigma_x{}^0=p_1$ sein. Diese Bedingung liefert:

$$c=-\frac{1}{4}\frac{3m+1}{m+1}ar^2-b\left(lnr+\frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1}\right).$$

Ist aber die Platte am Rande eingeklemmt, und zwar so, dass die Meridianlinie der Mittelfläche daselbst die x-Axe berührt (Fig. 39), so erhält man aus der diesem Umstande entsprechenden Bedingung, dass $\frac{dz}{dx}=0$ sein muss für $x=r$:

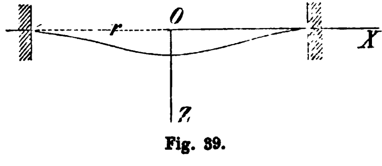


Fig. 39.

$$c=-\frac{1}{4}ar^2-b\left(lnr-\frac{1}{2}\right).$$

α. Auf die Oberfläche der Platte wirkt nur der gleichförmig vertheilte specifische Druck p.

286. — Wenn die Constante c der Bedingung gemäss bestimmt wird, dass $x=r$, $z=0$ zusammengehörige Werthe sind, erhält man mit $b=0$ (entsprechend $P=0$) und $d=0$ als Gleichung der Meridianlinie nach Nr. 284:

$$z=\left(-a\frac{r^2+x^2}{8}-c\right)\frac{r^2-x^2}{4}.$$

Nach Nr. 283 ist ferner:

$$\varepsilon_x=\frac{m-1}{m}\frac{p_1}{E}-\left(\frac{3}{8}ax^2+\frac{c}{2}\right)y$$

$$\varepsilon_\varphi=\frac{m-1}{m}\frac{p_1}{E}-\left(\frac{1}{8}ax^2+\frac{c}{2}\right)y.$$

Diese Ausdehnungen sind am grössten für $x=0$ oder $x=r$ und $y=\pm\frac{h}{2}$, und weil ebendaselbst $\tau=0$ ist, so sind sie Hauptausdehnungen. Ein noch grösserer Absolutwerth von ε könnte nur dort vielleicht stattfinden, wo

$$\tau=\frac{3}{4}\frac{h^2-4y^2}{h^3}px$$

am grössten ist, nämlich:

$$\tau_1{}^0=\frac{3}{4}\frac{r}{h}p \text{ für } x=r,\ y=0,$$

*) Den für $x=0$ in unbestimmter Form erscheinenden Werth

$$x\,lnx = 0.ln0 = 0(-\infty)$$

findet man nach bekannter Methode $=0$.

obgleich sich analog dem Verhalten dünner Stäbe erwarten lässt, dass auch hier bei der dünnen Platte die durch die Tangentialspannungen bedingten Ausdehnungen von untergeordneter Grössenordnung sind im Vergleich mit denjenigen, welche von der Biegung abhängen.

287. — Wenn insbesondere die Platte am Rande lose aufliegt und die radiale äussere Kraft am Rande fehlt, also $p_1 = 0$ ist, so wird mit

$$a = \frac{m^2-1}{m^2}\frac{6}{Eh^3}p \text{ und } c = -\frac{1}{4}\frac{3m+1}{m+1}ar^2$$

(cf. Nr. 284 und 285) die Gleichung der Meridianlinie:

$$z = \frac{3}{16}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{Eh^3}\left(\frac{5m+1}{m+1}r^2 - x^2\right)(r^2 - x^2);$$

mit $x = 0$ ergiebt sich daraus die Durchbiegung der Platte in der Mitte:

$$z_0 = \frac{3}{16}\frac{(m-1)(5m+1)}{m^2}\frac{pr^4}{Eh^3}.$$

Ferner ist:

$$E\varepsilon_x = \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{h^3}\left(\frac{3m+1}{m+1}r^2 - 3x^2\right)y$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{h^3}\left(\frac{3m+1}{m+1}r^2 - x^2\right)y.$$

Für $x = 0$ und $y = \pm\frac{h}{2}$ sind beide Werthe absolut genommen am grössten, und zwar gleich gross, nämlich:

$$max.(E\varepsilon)_0 = \frac{3}{8}\frac{(m-1)(3m+1)}{m^2}\frac{r^2}{h^2}p.$$

An den Stellen ($x = r$, $y = 0$), wo τ am grössten $= \tau_1{}^0$ ist, sind σ_x und σ_φ = Null, und es ist deshalb ebendaselbst nach Nr. 169:

$$max.(E\varepsilon^0)_1 = \frac{m+1}{m}\tau_1{}^0 = \frac{3}{4}\frac{m+1}{m}\frac{r}{h}p.$$

Sofern $\frac{r}{h}$ nach der Voraussetzung eine grosse Zahl ist, hat jedoch dieses Maximum am Rande der Platte eine untergeordnete Grösse im Vergleich mit $max.(E\varepsilon)_0$ in den Mittelpunkten der beiden Plattenoberflächen, welches letztere sonach das $= k$ zu setzende Maximum des Absolutwerthes von $E\varepsilon$ überhaupt ist.

Insbesondere mit $m = 3$ ist:

$$z_0 = \frac{2}{3}\frac{pr^4}{Eh^3}; \quad max.(E\varepsilon) = \frac{5}{6}\frac{r^2}{h^2}p$$

und mit $max.(E\varepsilon) = k$ die nöthige Dicke der Platte:

$$h = r\sqrt{\frac{5}{6}\frac{p}{k}}.$$

288. — Für die am Rande eingeklemmte Platte ist mit

$$a = \frac{m^2-1}{m^2}\frac{6}{Eh^3}p \text{ und } c = -\frac{1}{4}ar^2$$

(cf. Nr. 284 und 285) die Gleichung der Meridianlinie der gebogenen Mittelfläche:

$$z = \frac{3}{16}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{Eh^3}(r^2-x^2)^2$$

und mit $x = 0$ die Durchbiegung in der Mitte:

$$z_0 = \frac{3}{16}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{pr^4}{Eh^3}.$$

Ferner ist:

$$E\varepsilon_x = \frac{m-1}{m}p_1 + \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{h^3}(r^2-3x^2)\,y$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{m-1}{m}p_1 + \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{h^3}(r^2-x^2)\,y.$$

Ist p_1 positiv (oder Null), so ist $E\varepsilon_x$ absolut genommen am grössten für $x = 0$, $y = \frac{h}{2}$ und für $x = r$, $y = -\frac{h}{2}$, $E\varepsilon_\varphi$ für $x = 0$, $y = \frac{h}{2}$, und zwar ist dieses Maximum von $E\varepsilon_\varphi$ dem ersteren Maximum von $E\varepsilon_x$ gleich, nämlich:

$$max.(E\varepsilon)_0 = \frac{m-1}{m}p_1 + \frac{3}{8}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{r^2}{h^2}p,$$

während das zweite Maximum von $E\varepsilon_x$:

$$max.(E\varepsilon_x)_1 = \frac{m-1}{m}p_1 + \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{r^2}{h^2}p$$

noch grösser, mithin der untergeordneten Grösse von τ wegen das $= k$ zu setzende Maximum des Absolutwerthes von $E\varepsilon$ überhaupt ist.

Insbesondere mit $m = 3$ ist:

$$z_0 = \frac{1}{6}\frac{pr^4}{Eh^3};\quad max.(E\varepsilon) = \frac{2}{3}\left(p_1 + \frac{r^2}{h^2}p\right).$$

Ist noch $p_1 = 0$, so ist für $max.(E\varepsilon) = k$ die nöthige Dicke der Platte:

$$h = r\sqrt{\frac{2}{3}\frac{p}{k}}.$$

289. — Im Falle der vorigen Nummer befinden sich u. A. die ebenen Platten, durch welche ein dem inneren Ueberdrucke p pro Flächeneinheit ausgesetzter Hohlcylinder an den Enden geschlossen ist, falls in Betreff der cylindrischen Rohrwand die Voraussetzung der Nr. 278 sich erfüllt findet, dass die Meridianlinie ihrer Mittelfläche an den Enden keine Neigung gegen die Axe erleidet. Ist die Länge des Hohlcylinders $= 2l$, so ist in diesem Falle:

$$p_1 = \frac{lp}{h},$$

folglich nach Nr. 288:

$$max.(E\varepsilon) = \frac{m-1}{m}\frac{r}{h}\left(\frac{l}{r} + \frac{3}{4}\frac{m+1}{m}\frac{r}{h}\right)p,$$

insbesondere mit $m = 3$:

$$max.(E\varepsilon) = \frac{2}{3}\frac{r}{h}\left(\frac{l}{r} + \frac{r}{h}\right)p.$$

Mit $m = 3$ ist aber für die cylindrische Wand nach Nr. 280:

$$max.(E\varepsilon) = 1{,}8\frac{pr}{\delta},$$

und es müsste sonach, wenn beide Theile (die Bodenplatten und die cylindrische Wand) gleich stark in Anspruch genommen werden sollen,

$$\frac{r}{h}\left(\frac{l}{r}+\frac{r}{h}\right) = 2{,}7\frac{r}{\delta}$$

und, wenn auch $\frac{l}{r}$ nur klein gegen $\frac{r}{h}$ ist (wie bei einem cylindrischen Dampfkessel), doch

$$\frac{\delta^2}{h^2} < 2{,}7\frac{\delta}{r}$$

sein. Für einen Dampfkessel insbesondere würde mit

$$\frac{\delta}{2r} = 0{,}0014n + 0{,}005 \quad (\text{Nr. } 281)$$

daraus folgen:

$$\frac{h}{\delta} > \frac{1}{\sqrt{5{,}4(0{,}0014n+0{,}005)}};$$

z. B. für $n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

$\frac{h}{\delta} > 5{,}34 \quad 4{,}86 \quad 4{,}45 \quad 4{,}17 \quad 3{,}93 \quad 3{,}70.$

Wegen dieser verhältnissmässig grossen Dicke, welche sie erhalten müssten, sind ebene Böden bei Dampfkesseln möglichst zu vermeiden, sofern sie nicht durch Feuerröhren unterbrochen und gestützt werden.*)

β. Die Platte ist nur durch die in der Mitte angreifende Einzelkraft P belastet.

290. — Die Gleichung der Meridianlinie der gebogenen Mittelfläche ergiebt sich nach Nr. 284 mit $a = 0$ (entsprechend $p = 0$), $d = 0$ nach Nr. 285 und wenn die Constante e der Bedingung gemäss bestimmt wird, dass $x = r$, $z = 0$ zusammengehörige Werthe sind:

$$z = -\frac{b}{4}\left[r^2(lnr-1) - x^2(lnx-1)\right] - \frac{c}{4}(r^2 - x^2).$$

Nach Nr. 283 ist ferner, wenn keine radiale Kraft auf den Rand der Platte wirkt, also $p_1 = 0$ ist:

$$\varepsilon_x = -\left[\frac{b}{2}\left(lnx + \frac{1}{2}\right) + \frac{c}{2}\right]y$$

$$\varepsilon_\varphi = -\left[\frac{b}{2}\left(lnx - \frac{1}{2}\right) + \frac{c}{2}\right]y.$$

Die Tangentialspannung τ ist in der Mittelfläche ($y = 0$), woselbst sie am grössten ist:

$$\tau^0 = \frac{3}{4\pi}\frac{P}{hx} \quad (\text{Nr. } 284).$$

*) Eine rationelle Untersuchung der Anstrengung, welche die gewöhnlich ausgeführten gewölbten Böden auszuhalten haben, ist, soviel bekannt, zur Zeit noch nicht geliefert; dass dieselben, wenn sie auch nach Kugelcalotten gekrümmt werden, doch wesentlich anders wie Theile voller Kugelschalen sich verhalten, ist selbstverständlich.

Im Mittelpunkte der Platte ($x = 0$) werden ε_x, ε_φ und τ^0 unendlich gross, und es ist also nöthig, dass die belastende Kraft P auf eine, wenn schon kleine, so doch endliche Fläche oder Linie vertheilt sei, z. B. auf eine zur Plattenoberfläche concentrische Kreisfläche oder Kreislinie mit dem Radius r_0. Ist in diesem Falle r_0 nur hinlänglich klein, etwa $< \frac{1}{10} r$, so kann die obige Gleichung für z noch mit genügender Annäherung als Gleichung der ganzen gebogenen Mittelfläche gelten, während die Ausdrücke von ε_x, ε_φ und τ^0 wenigstens für $x > r_0$ nicht wesentlich fehlerhaft sein können und dann auch die gefährlichste Wirkung der Belastung nur für $x \geqq r_0$ gesucht zu werden braucht.

291. — Wenn insbesondere die Platte am Rande lose aufliegt, so wird mit

$$b = \frac{m^2-1}{m^2} \frac{6}{Eh^3} \frac{P}{\pi} \text{ und } c = -b\left(lnr + \frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1}\right)$$

(cf. Nr. 284 und 285) die Gleichung der Meridianlinie:

$$z = \frac{3}{4\pi} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{P}{Eh^3}\left(2x^2 ln\frac{x}{r} + \frac{3m+1}{m+1}(r^2-x^2)\right);$$

daraus mit $x = 0$ die Durchbiegung der Platte in der Mitte:

$$z_0 = \frac{3}{4\pi} \frac{(m-1)(3m+1)}{m^2} \frac{Pr^2}{Eh^3}.$$

Ferner ist:

$$E\varepsilon_x = \frac{3}{\pi} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{P}{h^3}\left(ln\frac{r}{x} - \frac{1}{m+1}\right) y$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{3}{\pi} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{P}{h^3}\left(ln\frac{r}{x} + \frac{m}{m+1}\right) y.$$

Beide Werthe sind am grössten für $y = \frac{h}{2}$ und $x = r_0$ (cf. Nr. 290), und zwar ist das Maximum von $E\varepsilon_\varphi$ der grösste Werth von $E\varepsilon$ überhaupt:

$$max.(E\varepsilon) = \frac{3}{2\pi} \frac{m^2-1}{m^2}\left(ln\frac{r}{r_0} + \frac{m}{m+1}\right)\frac{P}{h^2},$$

indem auch der dem Maximum von τ^0 entsprechende relativ grösste Werth von $E\varepsilon$, nämlich (cf. Nr. 169):

$$max.\left(\frac{m+1}{m}\tau^0\right) = \frac{3}{4\pi} \frac{m+1}{m} \frac{P}{hr_0}$$

bei verhältnissmässig kleiner Plattendicke stets wesentlich kleiner ist.

Insbesondere mit $m = 3$ ist:

$$z_0 = \frac{5}{3\pi} \frac{Pr^2}{Eh^3}$$

$$max.(E\varepsilon) = \left(\frac{4}{3} ln\frac{r}{r_0} + 1\right)\frac{P}{\pi h^2}.$$

$$max.\left(\frac{m+1}{m}\tau^0\right) = \frac{P}{\pi h r_0} = \frac{r}{r_0}\frac{h}{r}\frac{P}{\pi h^2}.$$

Z. B. für $\frac{r}{r_0}$ = 10 20 30 40 50

ist $max.(E\varepsilon)$ = 4,07 4,99 5,53 5,92 6,22 . $\frac{P}{\pi h^2}$

= 0,407 0,250 0,184 0,148 0,124 . $\frac{r}{h}\, max.\left(\frac{m+1}{m}\tau^0\right)$

d. i. resp. 4,88 5,99 6,64 7,10 7,46

mal so gross, als der Maximalwerth von $E\varepsilon$ bei gleichförmiger Vertheilung der Belastung $P = \pi r^2 p$ auf der Platte (cf. No. 287), während die Durchbiegung z_0 hier 2,5 mal so gross ist, als in jenem Falle.

292. — Für die am Rande eingeklemmte Platte ist mit

$$b = \frac{m^2-1}{m^2}\frac{6}{Eh^3}\frac{P}{\pi} \text{ und } c = -b\left(ln r - \frac{1}{2}\right)$$

die Gleichung der Meridianlinie:

$$z = \frac{3}{4\pi}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{P}{Eh^3}\left(2x^2 ln\frac{x}{r} + r^2 - x^2\right);$$

daraus mit $x = 0$ die Durchbiegung in der Mitte:

$$z_0 = \frac{3}{4\pi}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{Pr^2}{Eh^3}.$$

Ferner ist:

$$E\varepsilon_x = \frac{3}{\pi}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{P}{h^3}\left(ln\frac{r}{x} - 1\right)y$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{3}{\pi}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{P}{h^3}ln\frac{r}{x}\cdot y.$$

Beide Werthe sind am grössten für $y = \frac{h}{2}$ und $x = r_0$ ($E\varepsilon_x$ wenigstens dann, wenn $\frac{r}{r_0}$ $e^2 = 7,39$ ist, widrigenfalls der Maximalwerth von ε_x am Rande für $x = r$ stattfinden würde), und zwar ist das Maximum von $E\varepsilon_\varphi$ der grösste Werth von $E\varepsilon$ überhaupt:

$$max.(E\varepsilon) = \frac{3}{2\pi}\frac{m^2-1}{m^2}ln\frac{r}{r_0}\cdot\frac{P}{h^2}.$$

Insbesondere mit $m = 3$ ist:

$$z_0 = \frac{3}{2\pi}\frac{Pr^2}{Eh^3};\quad max.(E\varepsilon) = \frac{4}{3}ln\frac{r}{r_0}\cdot\frac{P}{\pi h^2};$$

z. B. für $\frac{r}{r_0}$ = 10 20 30 40 50

$max.(E\varepsilon)$ = 3,07 3,99 4,53 4,92 5,22 . $\frac{P}{\pi h^2}$

d. i. resp. 4,60 5,99 6,80 7,38 7,83

mal so gross, als der Maximalwerth von $E\varepsilon$ bei gleichförmiger Vertheilung der Belastung $P = \pi r^2 p$ auf der Platte (cf. Nr. 288 für $p_1 = 0$). Die Durchbiegung z_0 ist 4 mal so gross, als in jenem Falle oder ebenso gross, wie bei gleichförmiger Belastung und freier Auflage des Plattenrandes (Nr. 287).

2. Durchbrochene Platte.

293. — Damit die Symmetrie gewahrt, d. h. die Platte ein Umdrehungskörper bleibe, wird eine concentrische kreisförmige Durchbrechung vorausgesetzt, also eine ringförmige ebene Platte, deren äusserer und innerer Radius resp. $= r$ und r_0 sein möge.

Dergleichen durchbrochene Platten kommen im Maschinenbau u. A. vor als Deckelplatten von Hohlcylindern (Dampfmaschinen-Cylindern etc.) mit einer centralen Oeffnung für den Durchgang einer runden Stange (Kolbenstange) oder als Endplatten cylindrischer Dampfkessel, welche mit einer inneren Feuerröhre versehen sind; ist auch im letzteren Falle die Feuerröhre nicht concentrisch mit dem Kessel, sondern nach Unten hin gerückt, so wird doch immerhin die Untersuchung der ebenen Endplatte unter der Voraussetzung einer centralen Durchbrechung einen nützlichen Anhaltspunkt für die Beurtheilung ihrer nur sehr schwierig genau zu untersuchenden Anstrengung auch bei excentrischer Durchbrechung durch die Feuerröhre gewähren.

In beiden genannten Fällen ist die Platte einem gleichförmig vertheilten Normaldrucke unterworfen, welcher, wie im Vorhergehenden, mit p pro Flächeneinheit bezeichnet wird; ist auch streng genommen im einen Falle (Cylinderdeckel) der äussere, im anderen (Kesselboden) der äussere und innere Plattenrand zugleich noch einer radial gerichteten äusseren Zugkraft unterworfen, so ist diese doch immer nur von untergeordnetem Einflusse und wird deshalb hier (cf. Nr. 283) $p_1 = 0$ gesetzt. In beiden Fällen ist ferner die ringförmige Platte am äusseren Rande als fest eingeklemmt zu betrachten, während der innere Rand im einen Falle nach der Axe verschiebbar, im anderen gleichfalls fest eingeklemmt ist. Auf diese zwei Fälle beschränkt sich die folgende Untersuchung, welcher die Formeln in Nr. 283 und 284 zu Grunde gelegt werden können; in denselben ist

$$P = -\pi r_0^2 p, \quad \text{also } b = -a r_0^2$$

zu setzen, wenn auf den beweglichen inneren Rand der Platte keine nach der Axe gerichtete Kraft wirkt, wie zunächst in den beiden folgenden Nummern angenommen wird.

294. — Bei der ringförmigen ebenen Platte, welche am äusseren Rande fest eingeklemmt, am inneren ganz frei ist, sind die Constanten c und d (Nr. 284) dadurch bestimmt, dass

$$\frac{dz}{dx} = 0 \text{ ist für } x = r$$

und $\sigma_x = 0$ „ „ $x = r_0$ und jeden Werth von y.

Daraus ergiebt sich mit Rücksicht auf Nr. 283 und 284 und wenn zur Abkürzung

$$n = \frac{r_0}{r}; \; \alpha = \frac{1 - \left(4 \, ln \frac{1}{n} - \frac{m-1}{m+1}\right) n^2}{1 + \frac{m-1}{m+1} \frac{1}{n^2}}$$

gesetzt wird:

$$\frac{c}{2} = -\frac{1}{8}\left[1 - 4n^2\left(ln r - \frac{1}{2}\right) - \alpha\right] a r^2; \quad d = -\frac{1}{8}\alpha a r^4$$

$$E\varepsilon_x = \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{pr^2}{h^3}\left[1 - 3\frac{x^2}{r^2} - 4n^2\left(ln\frac{r}{x} - 1\right) - \alpha\left(\frac{r^2}{x^2} + 1\right)\right] y$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{pr^2}{h^3}\left[1 - \frac{x^2}{r^2} - 4n^2 ln\frac{r}{x} + \alpha\left(\frac{r^2}{x^2} - 1\right)\right] y. \text{ *)}$$

Die Constante e (Nr. 284) würde nur dann in Betracht kommen, wenn die Biegung der Platte, d. h. die Abweichung z eines Punktes der Mittelfläche von der ursprünglichen Mittelebene berechnet werden sollte, worauf es hier nicht ankommt.

Mit $m = 3$, also $\alpha = \dfrac{1 - \left(4 ln\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)n^2}{1 + \frac{1}{2n^2}}$

findet man für $y = \frac{h}{2}$ und

$$\begin{array}{lll} & n = 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ x = r_0: \begin{cases} -E\varepsilon_x = \\ E\varepsilon_\varphi = \end{cases} & \begin{array}{l}0{,}890 \\ 2{,}670\end{array} & \begin{array}{l}0{,}686 \\ 2{,}058\end{array} & \begin{array}{l}0{,}294 \,.\, \frac{1}{3}\frac{r^2}{h^2}p \\ 0{,}882 \,.\quad " \quad = 3\,(-E\varepsilon_x)\end{array} \\ x = r: \begin{cases} -E\varepsilon_x = \\ E\varepsilon_\varphi = \end{cases} & \begin{array}{l}1{,}996 \\ \text{Null.}\end{array} & \begin{array}{l}1{,}953 \\ \end{array} & \begin{array}{l}1{,}919 \,.\quad " \\ \end{array} \end{array}$$

Für kleinere Werthe von n ist also ε_φ am inneren Rande, für grössere Werthe von n dagegen ε_x am äusseren Rande, und zwar immer an der Oberfläche $\left(y = \pm\frac{h}{2}\right)$ der Platte die grösste Ausdehnung überhaupt, oder es ist allgemein:

$$max.(E\varepsilon) = \begin{cases} \frac{3}{8}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{r^2}{h^2}\left[1 - n^2 - 4n^2 ln\frac{1}{n} + \alpha\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\right] p \\ \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{r^2}{h^2}(1 - 2n^2 + \alpha)p \end{cases}$$

d. h. = dem ersten oder zweiten dieser beiden Ausdrücke, jenachdem n kleiner oder grösser und somit der erste oder zweite Ausdruck der grössere ist. —

Bei einem Cylinderdeckel wird übrigens der Rand der centralen Durchbrechung durch die sich hier anschliessende Stopfbüchse der Art abgesteift, dass die Art seiner Biegung sich derjenigen nähert, welche in der folgenden Nummer besprochen wird.

---

*) Diese Ausdrücke von $E\varepsilon_x$ und $E\varepsilon_\varphi$ stimmen, wie es sein muss, mit denen überein, welche in Nr. 288 für die volle kreisförmige Platte erhalten wurden, wenn $n = 0$ gesetzt wird, wodurch auch $\alpha = 0$ wird.

295. — Bei der am äusseren Rande fest und am inneren in einer beweglichen Hülse eingeklemmten ringförmigen ebenen Platte sind die Constanten c und d (Nr. 284) bestimmt durch:

$$\frac{dz}{dx} = 0 \text{ für } x = r \text{ und } x = r_0.$$

Daraus ergiebt sich mit Rücksicht auf Nr. 283 und 284 und wenn zur Abkürzung

$$n = \frac{r_0}{r}; \quad \alpha = \frac{1 - \left(4 \ln \frac{1}{n} + 1\right) n^2}{\frac{1}{n^2} - 1}$$

gesetzt wird:

$$\frac{c}{2} = -\frac{1}{8}\left[1 - 4n^2\left(\ln r - \frac{1}{2}\right) + \alpha\right] ar^2; \quad d = \frac{1}{8} \alpha a r^4$$

$$E\varepsilon_x = \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{pr^2}{h^3}\left[1 - 3\frac{x^2}{r^2} - 4n^2\left(\ln\frac{r}{x} - 1\right) + \alpha\left(\frac{r^2}{x^2} + 1\right)\right] y$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{pr^2}{h^3}\left[1 - \frac{x^2}{r^2} - 4n^2 \ln\frac{r}{x} - \alpha\left(\frac{r^2}{x^2} - 1\right)\right] y. \text{*)}$$

Mit $m = 3$ findet man für $y = \frac{h}{2}$ und

$$n = 0{,}1 \qquad 0{,}2 \qquad 0{,}4$$

$$x = r_0:\ E\varepsilon_x = 1{,}834 \quad 1{,}544 \quad 0{,}924 \,.\, \frac{1}{3}\frac{r^2}{h^2}p$$

$$x = r:\ -E\varepsilon_x = 1{,}942 \quad 1{,}781 \quad 1{,}263 \,. \quad ,,$$

$E\varepsilon_\varphi$ ist an beiden Rändern $= 0$, und es ist sonach $\mp \varepsilon_x$ für $x = r$ und $y = \pm \frac{h}{2}$ der grösste Absolutwerth von ε überhaupt:

$$max. (E\varepsilon) = \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{r^2}{h^2}(1 - 2n^2 - \alpha) p.$$

Damit, wie diese Rechnung voraussetzt, auf den inneren Rand der Platte keine nach der Axe gerichtete Kraft wirke, müssen beide Ränder nach der Richtung der Axe gegenseitig verschiebbar sein; bei dem Cylinderdeckel ist dies der Fall, indem die Stopfbüchse, mit welcher der innere Deckelrand fest verbunden ist, längs der Kolbenstange gleiten kann.

296. — Wenn aber die durchbrochene Platte an beiden Rändern fest eingeklemmt ist, so dass diese Ränder sich nicht nach der Richtung der Axe gegeneinander verschieben können, so ist P, also auch b eine vorläufig unbekannte Constante; die im Ausdrucke von z (Nr. 284) vorkommenden 4 Constanten b, c, d, e sind aber dadurch bestimmt, dass

$$z = 0 \text{ und } \frac{dz}{dx} = 0 \text{ ist für } x = r \text{ und } x = r_0.$$

*) Mit $n = 0$, also $\alpha = 0$, stimmen auch diese Ausdrücke, wie es sein muss, mit denen überein, welche in Nr. 288 für die volle kreisförmige Platte erhalten wurden.

Demgemäss ergiebt sich mit Rücksicht auf Nr. 283 und 284 und wenn

$$n = \frac{r_0}{r}; \quad \beta = \frac{1 + n^2 - 4n^2 \dfrac{ln\dfrac{1}{n}}{1-n^2}}{1 - 4n^2 \left(\dfrac{ln\dfrac{1}{n}}{1-n^2}\right)^2}$$

gesetzt wird:

$$\frac{b}{2} = -\frac{1}{8}\beta a r^2; \quad \frac{c}{2} = -\frac{1}{8}\left[1 + n^2 - \beta\left(lnr - \frac{1}{2} + n^2 \frac{ln\dfrac{1}{n}}{1-n^2}\right)\right] a r^2$$

$$d = \frac{n^2}{8}\left(1 - \beta \frac{ln\dfrac{1}{n}}{1-n^2}\right) a r^4$$

$$E\varepsilon_x = \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{pr^2}{h^3}\left[1 - 3\frac{x^2}{r^2} + n^2 + \beta\left(1 - ln\frac{r}{x} - n^2\frac{ln\dfrac{1}{n}}{1-n^2}\right) - \right.$$

$$\left. - n^2\left(\beta\frac{ln\dfrac{1}{n}}{1-n^2} - 1\right)\right]\frac{r^2}{x^2}y.$$

Der grösste Absolutwerth von ε ist unter den Werthen von ε_x an den Rändern der Platte für $y = \pm\frac{h}{2}$ zu suchen (ε_φ ist hier natürlich wieder $= 0$); für $x = r_0$, $y = -\frac{h}{2}$ ist:

$$E\varepsilon_x = \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{r^2}{h^2}\left[-1 + n^2 + \beta\left(\frac{ln\dfrac{1}{n}}{1-n^2} - \frac{1}{2}\right)\right]p$$

und für $x = r$, $y = -\frac{h}{2}$:

$$E\varepsilon_x = \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{r^2}{h^2}\left[1 - n^2 - \beta\left(\frac{1}{2} - n^2\frac{ln\dfrac{1}{n}}{1-n^2}\right)\right]p.$$

Hiernach findet man für $y = -\frac{h}{2}$ z. B. mit

	$n =$ 0,3	0,4	0,5	
$x = r_0$:	$E\varepsilon_x =$ 0,4557	0,3043	0,1976	$\cdot \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{r^2}{h^2}p$
$x = r$:	$E\varepsilon_x =$ 0,2779	0,2096	0,1492	„

woraus zu schliessen, dass ε_x für $y = \pm\frac{h}{2}$ am inneren Rande der Platte der grösste Absolutwerth von ε überhaupt ist. Das relative Maximum von ε an einer gewissen mittleren Stelle, woselbst die Platte entgegengesetzt ge-

bogen ist, wie an den Rändern, ist nämlich immer wesentlich kleiner; dieses Maximum findet statt für

$$x = r\sqrt{\frac{\beta}{12}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{12}\right)^2+\frac{\alpha}{3}}},$$

worin

$$\alpha = n^2\left(\beta\frac{ln\frac{1}{n}}{1-n^2}-1\right)$$

gesetzt ist. Man findet hiernach z. B.

für $n = 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5$

$x = 0,6106 \quad 0,6710 \quad 0,7331 . r$

und für $y = \frac{h}{2}$: $E\varepsilon_x = 0,1630 \quad 0,1202 \quad 0,0834 . \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{r^2}{h^2}p.$

297. — In dem Falle der vorigen Nummer würden sich die ebenen Endplatten eines mit einer inneren Feuerröhre versehenen Dampfkessels befinden, wenn diese Röhre, welche etwa halb so weit wie der Kessel zu sein pflegt, gerade in der Mitte des letzteren läge. Wird aber mit Rücksicht auf die excentrische Lage des Feuerrohrs sein Durchmesser nur $= 0,4$ des Kesseldurchmessers gesetzt, so lässt sich mit $n = 0,4$ die grösste Anstrengung der Endplatte, welche jedenfalls an ihrem mit dem Feuerrohre vernieteten inneren Rande stattfindet, mit $m = 3$ zu

$$max.(E\varepsilon) = 0,3043 . \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{r^2}{h^2}p = 0,2029\frac{r^2}{h^2}p$$

schätzen. Gleichfalls mit $m = 3$ ist dagegen die grösste Anstrengung des cylindrischen Blechmantels nach Nr. 280:

$$max.(E\varepsilon) = 1,805\frac{pr}{\delta},$$

unter δ die Dicke des hierzu verwendeten Blechs verstanden. Die Nietlöcher schwächen beide Theile, resp. erhöhen ihre Anstrengungen nahezu in gleichem Grade, und die Gleichsetzung beider Werthe von $max.(E\varepsilon)$ liefert:

$$\frac{h^2}{\delta^2} = 0,0562\frac{2r}{\delta}$$

oder mit $\frac{\delta}{2r} = 0,0014n + 0,005$ (cf. Nr. 281):

$$\frac{h}{\delta} = \sqrt{\frac{562}{14n+50}}.$$

Dabei ist n der innere Ueberdruck in Atmosphären, und man findet z. B.

mit $n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

$\frac{h}{\delta} = 2,96 \quad 2,68 \quad 2,47 \quad 2,30 \quad 2,16 \quad 2,05.$

Freilich verursachen die Winkeleisen, welche die Verbindung der Endplatte mit dem äusseren Blechmantel und dem inneren Feuerrohre vermitteln, eine wesentliche Absteifung der ersteren, und wenn mit Rücksicht darauf ihre grösste Anstrengung entsprechend $n = 0,5$ und $m = 3$ nur mit

$$max.(E\varepsilon) = 0,1976 . \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{r^2}{h^2}p = 0,1317\frac{r^2}{h^2}p \quad \text{(Nr. 296)}$$

in Rechnung gebracht wird, ergiebt die der obigen analoge Vergleichung:

$$\frac{h}{\delta} = \sqrt{\frac{365}{14n + 50}},$$

z. B. mit $n =$	1	2	3	4	5	6
$\frac{h}{\delta} =$	2,39	2,16	1,99	1,85	1,74	1,65.

Immerhin würde es also nöthig sein, zu den ebenen Endplatten, wenn sie nicht stärker angestrengt werden sollen, als die cylindrische äussere Kesselwand, etwa doppelt so dickes Blech zu verwenden, wie zu dieser.

III. Beliebige ebene Platte bei gleichförmig vertheilter Belastung.

a. Allgemeine Formeln.

298. — Die verhältnissmässig sehr kleine Dicke der Platte sei, wie in Nr. 283, mit h, der auf der Oberfläche gleichförmig vertheilte äussere Normaldruck mit p pro Flächeneinheit bezeichnet. Ausser ihm mögen im Allgemeinen auch auf den Rand der Platte äussere Kräfte nach der Richtung der Mittelfläche wirken, jedoch so, dass die Ausdehnung, welche dadurch nach einer gewissen Richtung in der Mittelfläche hervorgerufen wird, für alle Punkte derselben gleich gross ist.

Die verbogene Mittelfläche werde auf ein rechtwinkeliges Axensystem OX, OY, OZ bezogen, so dass die xy-Ebene mit der ursprünglich ebenen Mittelfläche zusammenfällt und die positive z-Axe die Richtung des äusseren Normaldrucks p hat. Wenn nun wieder, wie in Nr. 283, die Spannung σ_z als sehr klein gegen σ_x und σ_y vernachlässigt wird, so folgt aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{m-2}\right) \\ \sigma_y &= 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{m-2}\right) \\ \sigma_z &= 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{m-2}\right) \end{aligned}\right\} \mu = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad \text{(Nr. 227)}$$

$$\text{mit } \sigma_z = 0 \text{ und } A = \frac{m}{m-1} . 2G = \frac{m^2}{m^2-1} E:$$

$$\sigma_x = A\left(\varepsilon_x + \frac{1}{m}\varepsilon_y\right); \quad \sigma_y = A\left(\frac{1}{m}\varepsilon_x + \varepsilon_y\right).$$

Wenn ferner hier mit v (positiv nach der Richtung der positiven z-Axe) die Entfernung eines beliebigen Punktes der Platte von ihrer Mittelfläche bezeichnet und wie in Nr. 283 angenommen wird, dass eine ursprünglich zur Mittelfläche senkrechte materielle Gerade auch bei der Biegung diese Eigenschaft behalte, so ist, unter

ϱ_x den Krümmungsradius des der x-Axe parallelen und unter

ϱ_y „ „ „ „ y-Axe „

Normalschnitts der Mittelfläche im Punkte x, y verstanden, beide absolut genommen:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x{}^0 \pm \frac{v}{\varrho_x};\ \varepsilon_y = \varepsilon_y{}^0 \pm \frac{v}{\varrho_y}.$$

Dabei gelten die oberen oder unteren Zeichen, jenachdem die betreffenden Normalschnitte nach der Seite der positiven z-Axe convex oder concav sind; $\varepsilon_x{}^0$ und $\varepsilon_y{}^0$ sind die als constant vorausgesetzten Ausdehnungen der Mittelfläche selbst nach den Richtungen x und y. Der analytische Ausdruck von ϱ_x ist vollständig:

$$\varrho_x = \mp \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\frac{d^2z}{dx^2}\cos^2\lambda + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}\cos\lambda\cos\mu + \frac{d^2z}{dy^2}\cos^2\mu},$$

unter λ und μ die Winkel verstanden, welche die Tangente des der x-Axe parallelen Normalschnitts beziehungsweise mit der x-Axe und der y-Axe bildet, und wo das obere oder untere Zeichen unter denselben Umständen gilt, wie im obigen Ausdrucke von ε_x. Wenn aber, wie hier vorausgesetzt wird, die Krümmung der Mittelfläche sehr gering ist, so sind $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ und $\cos\mu$ sehr klein, $\cos\lambda$ ist sehr wenig von der Einheit verschieden, also näherungsweise:

$$\frac{1}{\varrho_x} = \mp\frac{d^2z}{dx^2};\ \text{desgl.}\ \frac{1}{\varrho_y} = \mp\frac{d^2z}{dy^2};\ \text{mithin:}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x{}^0 - v\frac{d^2z}{dx^2} \qquad \sigma_x = \sigma_x{}^0 - Av\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{m}\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y{}^0 - v\frac{d^2z}{dy^2} \qquad \sigma_y = \sigma_y{}^0 - Av\left(\frac{1}{m}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

Dabei sind

$$\sigma_x{}^0 = A\left(\varepsilon_x{}^0 + \frac{1}{m}\varepsilon_y{}^0\right) \text{ und } \sigma_y{}^0 = A\left(\frac{1}{m}\varepsilon_x{}^0 + \varepsilon_y{}^0\right)$$

die Normalspannungen in der Mittelfläche nach den Richtungen der x-Axe und der y-Axe.

Da $\varepsilon_x{}^0$ und $\varepsilon_y{}^0$ constant sind, so folgt aus den obigen Ausdrücken von

$$\varepsilon_x = \frac{d\xi}{dx} \text{ und } \varepsilon_y = \frac{d\eta}{dy}$$

mit Rücksicht auf die Geringfügigkeit der Biegung und wenn die z-Axe an den ursprünglich in ihr gelegenen materiellen Punkt der Mittelfläche fixirt gedacht wird:

$$\xi = x\varepsilon_x{}^0 - v\frac{dz}{dx};\ \eta = y\varepsilon_y{}^0 - v\frac{dz}{dy}$$

und damit (cf. Nr. 229, Gl. VI):

$$\tau_z = G\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) = -2Gv\frac{d^2z}{dx\,dy}.$$

Aus den früheren Untersuchungen dünner Platten wie dünner Stäbe ist zu schliessen, dass auch hier τ_x und τ_y nicht minder wie σ_z von untergeordneter Grösse sind; wenn somit nur die im Obigen ausgedrückten Spannungen

$$\sigma_x, \quad \sigma_y \text{ und } \tau_z$$

berücksichtigt werden, so liegt damit der in Nr. 231 betrachtete Specialfall vor, demzufolge die Hauptausdehnungen ε_1, ε_2 und ε_3 bestimmt sind durch:

$$E\varepsilon_1 = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}$$

$$E\begin{pmatrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}.$$

Die absolut genommen grösste von ihnen ist ε_2 oder ε_3, jenachdem $\sigma_x + \sigma_y$ positiv oder negativ ist; beide finden parallel der Mittelfläche statt, da ε_1 die Ausdehnung senkrecht zur Mittelfläche $= \varepsilon_z$ ist.

299. — Damit die Spannungen σ_x, σ_y und τ_z für einen gegebenen Punkt (x, y) der Platte durch die Formeln der vorigen Nummer bestimmt seien, muss man z als Function von x und y, d. h. die Gleichung der gebogenen Mittelfläche kennen. Ihre Differentialgleichung wird gefunden mit Hülfe der allgemeinen Gleichungen (I) in Nr. 229, worin

$$X = Y = Z = 0 \text{ und } dz = dv$$

zu setzen ist:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dv} + \frac{d\tau_z}{dy} &= 0\\ \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_z}{dx} + \frac{d\tau_x}{dv} &= 0\\ \frac{d\sigma_z}{dv} + \frac{d\tau_x}{dy} + \frac{d\tau_y}{dx} &= 0\end{aligned}\right\} \ldots \text{(I)}.$$

Wenn man in den beiden ersten dieser Gleichungen für σ_x, σ_y und τ_z die Werthe aus Nr. 298 substituirt, dann in Beziehung auf v integrirt und berücksichtigt, dass τ_x und τ_y an der Oberfläche der Platte $\left(\text{für } v = \mp\frac{h}{2}\right)$ $=$ Null sein müssen, so ergiebt sich:

$$\tau_x = A\left(\frac{d^3z}{dx^2dy} + \frac{d^3z}{dy^3}\right)\cdot\left(\frac{v^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right)$$

$$\tau_y = A\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right)\cdot\left(\frac{v^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right)$$

und die Einführung dieser Ausdrücke in die Gleichung:

$$p + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{d\tau_x}{dy}dv + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{d\tau_y}{dx}dv = 0,$$

welche wegen

$$\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{d\sigma_z}{dv}dv = 0 - (-p) = p$$

durch Integration der dritten der Gleichungen (I) nach v erhalten wird, liefert endlich:

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + 2\frac{d^4 z}{dx^2\,dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} = \frac{12p}{Ah^3}.$$

Das Integral dieser partiellen Differentialgleichung lässt sich darstellen unter der Form:

$$z = \frac{3p}{16Ah^3}(a^2-x^2-y^2)(b^2-x^2-y^2) + (x^2+y^2)\left[\varphi(x+yi)+\psi(x-yi)\right] + \Phi(x+yi) + \Psi(x-yi)$$

($i = \sqrt{-1}$), worin unmittelbar die in Nr. 287 und 288 gefundenen Gleichungen der gebogenen Mittelfläche einer kreisförmigen Platte enthalten sind, wenn $y = 0$ und die willkürlichen Functionen φ, ψ, Φ, Ψ sämmtlich $= 0$ gesetzt werden.*)

Ein particuläres Integral von algebraischer Form wird erhalten, wenn (cf Nr. 244) gesetzt wird:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x+yi)+\psi(x-yi)\\ \Phi(x+yi)+\Psi(x-yi)\end{array}\right\} = \alpha + \alpha_1 x + \beta_1 y + \alpha_2(x^2-y^2) + \beta_2 . 2xy + \alpha_3(x^3-3xy^2) + \beta_3(3x^2y-y^3) + \alpha_4(x^4-6x^2y^2+y^4) + \beta_4(4x^3y-4xy^3) + \ldots.$$

Die Constanten sind durch die Umfangsbedingungen bestimmt, d. h. durch die Form der Platte und durch die Art ihrer Unterstützung oder Befestigung am Rande, event. auch an gewissen mittleren Stellen.

b. Die Platte ist in Beziehung auf zwei sich rechtwinkelig schneidende Normalebenen symmetrisch geformt und unterstützt oder befestigt.

300. — In Beziehung auf diese beiden Ebenen, welche als xz-Ebene und yz-Ebene angenommen werden, ist dann auch die gebogene Mittelfläche symmetrisch, weshalb in dem algebraischen Ausdrucke von z nur Glieder mit geraden Potenzen von x und y vorkommen können, mithin zu setzen ist:

$$z = \frac{3p}{16Ah^3}(a^2-x^2-y^2)(b^2-x^2-y^2) + (x^2+y^2)\left[c + c_1(x^2-y^2) + c_2(x^4-6x^2y^2+y^4) + \ldots\right] + d + d_1(x^2-y^2) + d_2(x^4-6x^2y^2+y^4) + d_3(x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6) + \ldots$$

*) Um diese Gleichung für z als der obigen Differentialgleichung entsprechend zu verificiren, kann man bemerken, dass letztere zu zerlegen ist in die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} = \frac{12p}{Ah^3}; \quad F = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Wegen $\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} = 16\left(x^2+y^2-\frac{a^2+b^2}{4}\right)$ für $f = (a^2-x^2-y^2)(b^2-x^2-y^2)$

und $\frac{d^2q}{dx^2} + \frac{d^2q}{dy^2} = 0$ für $q = \varphi(x+yi) + \psi(x-yi)$ (cf. Nr. 244)

folgt aber aus dem angeführten Ausdrucke von z:

$$F = \frac{3p}{Ah^3}\left(x^2+y^2-\frac{a^2+b^2}{4}\right) + 4\left[\varphi(x+yi)+\psi(x-yi)\right]$$

und daraus sofort:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} = \frac{12p}{Ah^3}.$$

oder auch mit Zusammenfassung gleichartiger Glieder:

$$z = \frac{3p}{16Ah^3}\left\{ e + fx^2 + gy^2 + f_1x^4 + [8-3(f_1+g_1)]x^2y^2 + g_1y^4 + \right.$$
$$\left. + f_2x^6 + 5(g_2-2f_2)x^4y^2 + 5(f_2-2g_2)x^2y^4 + g_2y^6 + \ldots \right\}.$$

Jede Gruppe von Gliedern von einer höheren Ordnung bringt dabei nur je 2 neue Constante mit sich.

1. Unendliche Platte, welche in den Knotenpunkten eines Systems von rechteckigen Feldern festgehalten wird.

301. — Wenn man in der Mittelebene einer unendlichen Platte zwei Systeme sich rechtwinkelig schneidender gerader Parallellinien gezogen denkt so dass je zwei auf einander folgende Gerade des einen Systems den gleichen Abstand $2a$, des anderen Systems den gleichen Abstand $2b$ haben, so seien die Durchschnittspunkte dieser Geraden in ihrer gemeinschaftlichen Ebene festgehalten, während übrigens eine beliebige Verbiegung aus dieser Ebene heraus stattfinden kann. Alle so gebildete rechteckige Felder wie $ABCD$, Fig. 40, verhalten sich gleich, und es bezieht sich die Untersuchung nur auf ein solches Feld; die xy-Ebene wird in der festen Ebene angenommen, der Anfangspunkt O im Mittelpunkte des betrachteten Feldes, die x-Axe parallel den Seiten $2a$, die y-Axe parallel den Seiten $2b$ desselben.

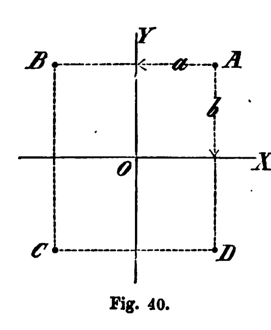


Fig. 40.

Zur Bestimmung der constanten Coefficienten im Ausdrucke von z (Nr. 300) dienen zunächst die Bedingungen, dass

$\frac{dz}{dx} = 0$ sein muss für $x = \pm a$ und jeden Werth von y,

$\frac{dz}{dy} = 0$ „ „ „ $y = \pm b$ „ „ „ „ x;

ihnen wird entsprochen, wenn

f_2, g_2 und alle folgenden Coefficienten $= 0$

gesetzt werden, wenn ferner

$$f_1 + g_1 = \frac{8}{3};\ f = -2f_1a^2;\ g = -2g_1b^2$$

gesetzt wird. Die fernere Bedingung:

$$z = 0 \text{ für } x = \pm a,\ y = \pm b$$

liefert:

$$e = f_1a^4 + g_1b^4$$

und somit wird:

$$z = \frac{3p}{16Ah^3}[f_1(a^2-x^2)^2 + g_1(b^2-y^2)^2].$$

Die Coefficienten f_1 und g_1, welche Functionen von a und b sein können, sind durch die Relation: $f_1 + g_1 = \frac{8}{3}$ noch nicht bestimmt; diese Unbestimmt-

heit wird indessen eingeschränkt durch die Erwägung, dass, wenn man mit $b = 0$ die der y-Axe parallelen Punktreihen zu festen Geraden zusammenrücken lässt, wodurch, weil dann wegen $y^2 \overline{\leqq} b^2$ auch $y = 0$ gesetzt werden muss,

$$z = \frac{3p}{16Ah^3} f_1 (a^2 - x^2)^2 = \frac{3}{16} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{p}{Eh^3} f_1 (a^2 - x^2)^2$$

wird, diese Gleichung offenbar übereinstimmen muss mit der auf die entsprechenden Axen bezogenen Gleichung der elastischen Linie eines beiderseits unter den Richtungswinkeln = Null eingeklemmten geraden Stabes von der Länge $2a$, welcher bei rechteckigem Querschnitte von beliebiger Breite und von der Höhe h durch den constanten Druck p auf die Einheit der Oberfläche belastet ist. Diese letztere Gleichung ergiebt sich nach Nr. 61 und 66 wie folgt:

$$z = \frac{p}{2Eh^3} (a^2 - x^2)^2$$

und es muss also $f_1 = \frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2-1}$ sein für $b = 0$. Ebenso folgt, dass g_1 eine solche Function von a und b sein muss, welche mit $a = 0$ sich auf $\frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2-1}$ reducirt. Wäre $a = b$, so wäre natürlich auch $f_1 = g_1$; setzt man deshalb

$$f_1 = \frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2-1} + b^n c; \quad g_1 = \frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2-1} + a^n c,$$

so ergiebt sich wegen $f_1 + g_1 = \frac{8}{3}$:

$$c = -\frac{8}{3} \frac{2\frac{m^2}{m^2-1} - 1}{a^n + b^n}$$

$$f_1 = \frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2-1} \frac{a^n - \frac{1}{m^2} b^n}{a^n + b^n}; \quad g_1 = \frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2-1} \frac{b^n - \frac{1}{m^2} a^n}{a^n + b^n}$$

und mit $A = \frac{m^2}{m^2-1} E$:

$$z = \frac{p}{2Eh^3} \left[\frac{a^n - \frac{1}{m^2} b^n}{a^n + b^n} (a^2 - x^2)^2 + \frac{b^n - \frac{1}{m^2} a^n}{a^n + b^n} (b^2 - y^2)^2 \right].$$

Daraus folgt: $\frac{d^2 z}{dx\, dy} = 0$, also $\tau_z = 0$; ε_x und ε_y sind also **Hauptausdehnungen** (mit derjenigen Annäherung, womit schon früher von τ_x und τ_y abstrahirt wurde), und wenn man in den Ausdrücken von ε_x und ε_y sub Nr. 298 die aus obiger Formel für z sich ergebenden Ausdrücke von $\frac{d^2 z}{dx^2}$ und $\frac{d^2 z}{dy^2}$, ferner nach Nr. 227:

$$E\varepsilon_x{}^0 = \sigma_x{}^0 - \frac{1}{m} \sigma_y{}^0; \quad E\varepsilon_y{}^0 = \sigma_y{}^0 - \frac{1}{m} \sigma_x{}^0$$

substituirt, ergiebt sich:

$$E\varepsilon_x = \sigma_x^0 - \frac{1}{m}\sigma_y^0 + \frac{2p}{h^3}\frac{a^n - \frac{1}{m^2}b^n}{a^n + b^n}(a^2 - 3x^2)v$$

$$E\varepsilon_y = \sigma_y^0 - \frac{1}{m}\sigma_x^0 + \frac{2p}{h^3}\frac{b^n - \frac{1}{m^2}a^n}{a^n + b^n}(b^2 - 3y^2)v.$$

ε_x ist am grössten für $x = \pm a,\ v = \pm\frac{h}{2}$
ε_y „ „ „ „ $y = \pm b,\ v = \pm\frac{h}{2}$ und zwar:

$$max.(E\varepsilon_x) = \sigma_x^0 - \frac{1}{m}\sigma_y^0 \pm 2\frac{a^n - \frac{1}{m^2}b^n}{a^n + b^n}\frac{a^2}{h^2}p$$

$$max.(E\varepsilon_y) = \sigma_y^0 - \frac{1}{m}\sigma_x^0 \pm 2\frac{b^n - \frac{1}{m^2}a^n}{a^n + b^n}\frac{b^2}{h^2}p,$$

wobei die letzten Glieder auf den rechten Seiten mit den oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, jenachdem die algebraische Summe der beiden ersten Glieder positiv oder negativ ist.

Der Exponent n ist bei dieser Entwickelung unbestimmt geblieben, und es scheint dafür nur eine Grenze angegeben werden zu können, welche er nicht überschreiten kann, damit, wie es offenbar der Fall sein muss, z stets um so grösser sich ergebe, je kleiner (absolut genommen) x und y sind;*) diese Grenze ist, wenn $a > b$, bestimmt durch:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n < m^2;\ \text{also}\ n < \frac{2\,lg\,m}{lg\frac{a}{b}}.$$

302. — Die bei der allgemeineren Aufgabe der vorigen Nummer gebliebene Unbestimmtheit hört auf, wenn $a = b$, d. h. eine **quadratische Anordnung der in der xy-Ebene festgehaltenen Punkte** vorausgesetzt wird. Dann ist $f_1 = g_1 = \frac{4}{3}$;

$$z = \frac{1}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{Eh^3}[(a^2-x^2)^2 + (a^2-y^2)^2]$$

$$max.(E\varepsilon_x) = \sigma_x^0 - \frac{1}{m}\sigma_y^0 \pm \frac{m^2-1}{m^2}\frac{a^2}{h^2}p$$

$$max.(E\varepsilon_y) = \sigma_y^0 - \frac{1}{m}\sigma_x^0 \pm \frac{m^2-1}{m^2}\frac{a^2}{h^2}p.$$

*) Hierbei muss freilich bemerkt werden, dass streng genommen in den für f_1 und g_1 oben gesetzten Ausdrücken schon eine willkürliche Specialisirung lag; vollkommen gerechtfertigt ist es nur,

$$f_1 = \frac{8}{3}\frac{m^2}{m^2-1} + \alpha;\quad g_1 = \frac{8}{3}\frac{m^2}{m^2-1} + \beta$$

zu setzen, unter α und β solche Functionen von a und b verstanden, welche durch Vertauschung von a mit b gegenseitig in einander übergehen, und von denen α mit $b = 0$, folglich β mit $a = 0$ verschwindet.

Insbesondere für $x = 0$, $y = 0$ ist

$$z_0 = \frac{1}{2} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{p a^4}{E h^3},$$

also $^2/_3$ so gross wie unter sonst gleichen Umständen die Durchbiegung in der Mitte einer am Rande eingeklemmten kreisförmigen Platte, deren Radius $r = a\sqrt{2}$, deren Durchmesser also = der Diagonale des Quadrats $ABCD$, Fig. 40, ist: cf. Nr. 288.

Ist ferner insbesondere $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \pm p_1$, so ist absolut genommen:

$$max.(E\varepsilon) = \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{m^2-1}{m^2} \frac{a^2}{h^2} p,$$

folglich mit $p_1 = 0$ gleichfalls $^2/_3$ so gross wie für die kreisförmige am Rande eingeklemmte Platte mit dem Radius $r = a\sqrt{2}$.

303. — Nach den Formeln von Nr. 302 ist näherungsweise die Anstrengung zu beurtheilen, welche die ebenen Platten, woraus der Feuerkasten einer Locomotive gebildet ist, unter der Einwirkung des im Kessel herrschenden Dampfdrucks auszuhalten haben. Am Rande sind diese Platten (bei dem äusseren Kasten aus Eisen, bei dem der Einwirkung des Feuers unmittelbar ausgesetzten inneren Kasten gewöhnlich aus Kupfer bestehend) freilich wegen der hier nöthigen dichten Nietung als stetig eingeklemmt zu betrachten, so dass das Verhalten der durch die mittleren Unterstützungsbolzen gebildeten quadratischen Plattenfelder sich demjenigen des Feldes einer unendlichen Platte nur um so mehr nähert, je mehr das Feld vom Plattenrande entfernt liegt; zunächst dem letzteren nähert sich das Verhalten demjenigen einer ringsum eingeklemmten quadratischen Platte: cf. Nr. 305.

Für die Deckplatte des inneren Feuerkastens ist

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = 0$$

zu setzen, weil der Dampfdruck auf die verticalen Seitenwände des inneren Kastens fast gänzlich von den diese Wände mit denen des äusseren Kastens verbindenden Bolzen aufgenommen, somit vom Rande der Deckplatte des inneren Kastens abgefangen wird. Es ist also mit $m = 3$:

$$max.(E\varepsilon) = \frac{8}{9} \frac{a^2}{h^2} p$$

oder mit $max.(E\varepsilon) = k$ und p (Kilogr. pro Quadratcentim.) $= \frac{31}{30} n$, unter n den Dampfüberdruck in Atmosphären verstanden:

$$k = \frac{124}{135} \frac{a^2}{h^2} n.$$

Z. B. für $a = 6^{cm}$, $h = 1{,}2^{cm}$ und $n = 5$ ist hiernach: $k = 115$ Kilogr. pro Quadratcentim. Weil aber diese Deckplatte nicht an absolut feste Punkte, sondern an schmiedeeiserne Balkenträger angebolzt ist, welche meist ohne Verstrebung mit dem äusseren Feuerkasten nur gegen die oberen Ränder der vorderen und hinteren verticalen Wand des inneren Kastens sich stützen, somit trotz ihrer hochkantigen Lage bei ca. 2,5 und 10 Centim. Seitenlänge ihres Querschnitts in nicht ganz unwesentlichem Grade der eigenen Durchbiegung unterworfen sind, so ist in der That die Anstrengung der fraglichen Deckplatte noch etwas grösser.

Bei den verticalen Kastenwänden werde die x-Axe horizontal, die y-Axe vertical angenommen; dann ist wieder $\sigma_x^0 = 0$ zu setzen, σ_y^0 dagegen ist,

sofern die Deckplatte des inneren Kastens mit der den äusseren Kasten überwölbenden Kuppel nicht verbunden ist, nicht = Null, sondern negativ für die Wände des inneren, positiv für die des äusseren Kastens. Wird in beiden Fällen diese Spannung absolut genommen mit p_1 bezeichnet, so ist mit $m = 3$:

$$max\,(E\varepsilon) = k = p_1 + \frac{8}{9}\frac{a^2}{h^2}p.$$

Dabei ist, wenn b und l die Dimensionen des Horizontaldurchschnitts des inneren resp. des äusseren Kastens bedeuten,

$$p_1 = \frac{blp}{2(b+l)h},$$

also auch mit $p = \frac{31}{30}n$:

$$k = \frac{31}{30}n\left(\frac{bl}{2(b+l)h} + \frac{8}{9}\frac{a^2}{h^2}\right).$$

Z. B. mit $a = 6$, $h = 1{,}2$, $n = 5$ und
$b = 90$, $l = 100$ Centim. für den inneren,
$b = 110$, $l = 120$ „ „ „ äusseren Kasten
ist im ersten Falle $k = 102 + 115 = 217$ Kilogr. pro Quadratcentim.
„ zweiten „ $k = 124 + 115 = 239$ „ „ „
entsprechend einer Pressung für die Wände des inneren, einer Spannung im engeren Sinne für die des äusseren Kastens.*)

2. Rechteckige Platte, welche am Rande ringsum eingeklemmt ist.

301. — Die Seitenlängen der Platte seien $= 2a$ und $2b$; die xy-Ebene falle mit der unveränderlichen Ebene des rechteckigen Umfangs der Mittelfläche zusammen und zwar so, dass die x-Axe die den Seiten $2a$, die y-Axe die den Seiten $2b$ des Rechtecks parallele Symmetrieaxe ist. Indem hier z eine solche Function von x und y sein muss, dass

$$z = 0,\ \frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } \frac{dz}{dy} = 0$$

ist sowohl für $x = \pm a$ und jeden Werth von y,
wie auch „ $y = \pm b$ „ „ „ „ x,
müssen, sofern überhaupt z als ganze algebraische Function von x und y dargestellt werden kann,

$$(a^2 - x^2)^2 \text{ und } (b^2 - y^2)^2$$

Factoren dieser Function sein. Wenn man deshalb

$$z = C(a^2 - x^2)^2 . (b^2 - y^2)^2$$

setzte, unter C eine von den Dimensionen und der Belastung der Platte abhängige Constante verstanden, so würde freilich diese Gleichung nicht der

*) Bei der bedeutenden Druckfestigkeit des Kupfers ist eine specifische Pressung von 217 Kilogramm zwar nicht bedenklich, indessen ist doch $h = 1{,}2$ Centim. die kleinste Dicke, welche man diesen Kupferplatten bei 12 Centim. Bolzenabstand zu geben pflegt. Die Deckplatte darf auch nicht schwächer gemacht werden, weil, selbst abgesehen von der eigenen Durchbiegung der Deckbalken, der oben gefundene Werth von $k = 115$ Kilogr. sowohl einer eigentlichen Spannung wie einer Pressung entspricht, die Zugfestigkeit des Kupfers aber bedeutend kleiner ist, als die Druckfestigkeit.

partiellen Differentialgleichung in Nr. 299 entsprechen, weil zwischen den Coefficienten der Glieder der nach Potenzen von x und y entwickelten Function nicht diejenigen Beziehungen stattfänden, welche aus der allgemeinen algebraischen Entwickelung von z in Nr. 300 sich ergeben. Auch durch Multiplication mit einer näher zu bestimmenden geraden algebraischen Function von x und y, d. h. indem man setzte:

$$z = C(a^2 - x^2)^2 . (b^2 - y^2)^2 . (1 + fx^2 + gy^2 + ..)$$

liesse sich in dieser Hinsicht nichts verbessern, indem man immer weniger zu bestimmende Coefficienten, als zu erfüllende Relationen behielte,*) und es ist daraus zu schliessen, dass hier überhaupt nicht allen Bedingungen der Aufgabe durch eine solche algebraische Form von z entsprochen werden kann.

Ein algebraischer Ausdruck von der Form:

$$z = C(a^2 - x^2)^2$$

muss indessen sich ergeben, wenn man eine der Dimensionen a und b, z. B. b in's Unendliche wachsen und damit die Platte in einen nur an zwei gegenüberliegenden Rändern eingeklemmten Plattenstreifen übergehen lässt. Wenn man unter diesen Umständen, vor Allem den Randbedingungen entsprechend und von der zu erfüllenden Differentialgleichung absehend, dennoch

$$z = C(a^2 - x^2)^2 . (b^2 - y^2)^2$$

setzt, so ist die Constante C an die Bedingungen gebunden, dass

mit $b = \infty$ für jeden endlichen Werth von $y : z = \frac{p}{2Eh^3}(a^2 - x^2)^2$

und mit $a = \infty$ „ „ „ „ „ $x : z = \frac{p}{2Eh^3}(b^2 - y^2)^2$

(cf. Nr. 301) sein muss; ihnen wird entsprochen durch die Gleichung:

$$z = \frac{p}{2Eh^3} \frac{(a^2 - x^2)^2 (b^2 - y^2)^2}{a^4 + b^4},$$

welche, wenn auch mangelhaft begründet und deshalb ohne theoretischen Werth, doch zu Folgerungen führt, die der Natur der Sache wohl angemessen zu sein scheinen. Mit $x = y = 0$ liefert sie die Durchbiegung in der Mitte:

$$z_0 = \frac{p}{2Eh^3} \frac{a^4 b^4}{a^4 + b^4},$$

insbesondere mit $a = b$ für eine quadratische Platte:

$$z_0 = \frac{1}{4} \frac{pa^4}{Eh^3}.$$

---

*) Der entwickelte Ausdruck

$$z = C(a^2 - x^2)^2 . (b^2 - y^2)^2$$

enthält Glieder bis von der 8ten Dimension in Beziehung auf x und y, und es müssten also (cf. Nr. 300) $1 + 2 + 3 = 6$ Relationen zwischen ihren Coefficienten stattfinden, welche, wie man sich leicht überzeugt, in der That nicht erfüllt sind. Die Hinzufügung des Factors

$$1 + fx^2 + gy^2$$

führt bis zu Gliedern der 10ten Dimension, zwischen deren Coefficienten $6 + 4 = 10$ Relationen erfüllt sein müssten, während nur 2 unbestimmte Coefficienten vorhanden sind, also 8 Relationen unerfüllt blieben u. s. f.

Die grösste Durchbiegung der letzteren wäre sonach halb so gross, als wenn nur zwei gegenüberliegende Ränder eingeklemmt, die beiden anderen aber frei wären; auch wäre sie eben so gross, wie die Durchbiegung in der Mitte bei der am Rande eingeklemmten kreisförmigen Platte (cf. Nr. 288), deren Radius

$$r = a\sqrt[4]{\frac{4}{3}\frac{m^2}{m^2-1}},$$

insbesondere mit $m = 3$: $r = a\sqrt[4]{1,5} = 1,107\,a$ ist.*)

305. — Aus der in der vorigen Nummer für z aufgestellten Gleichung folgt:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{2p}{Eh^3}\frac{(a^2-3x^2).(b^2-y^2)^2}{a^4+b^4}$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{2p}{Eh^3}\frac{(a^2-x^2)^2(b^2-3y^2)}{a^4+b^4}$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{8p}{Eh^3}\frac{(a^2-x^2)x(b^2-y^2)y}{a^4+b^4};$$

$$max.\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4p}{Eh^3}\frac{a^2b^4}{a^4+b^4} \text{ für } x = \pm a,\ y = 0$$

$$max.\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{4p}{Eh^3}\frac{a^4b^2}{a^4+b^4} \quad " \quad y = \pm b,\ x = 0$$

$$max.\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{32}{27}\frac{p}{Eh^3}\frac{a^3b^3}{a^4+b^4} \text{ für } x^2 = \frac{1}{3}a^2,\ y^2 = \frac{1}{3}b^2.$$

Nach Nr. 298 ist sonach mit $v = \pm\frac{h}{2}$ und wegen

$$E\varepsilon_x{}^0 = \sigma_x{}^0 - \frac{1}{m}\sigma_y{}^0;\ E\varepsilon_y{}^0 = \sigma_y{}^0 - \frac{1}{m}\sigma_x{}^0;\ 2G = \frac{m}{m+1}E:$$

$$max.(E\varepsilon_x) = \sigma_x{}^0 - \frac{1}{m}\sigma_y{}^0 \pm \frac{2b^4}{a^4+b^4}\frac{a^2}{h^2}p$$

$$max.(E\varepsilon_y) = \sigma_y{}^0 - \frac{1}{m}\sigma_x{}^0 \pm \frac{2a^4}{a^4+b^4}\frac{b^2}{h^2}p$$

$$max.\,\tau_z = \frac{8}{27}\frac{m}{m+1}\frac{2a^2b^2}{a^4+b^4}\frac{ab}{h^2}p.$$

An den Stellen, wo ε_x und ε_z am grössten sind, ist $\tau_z = 0$; dort dagegen, wo τ_z am grössten ist, ist $\sigma_x = \sigma_x{}^0$ und $\sigma_y = \sigma_y{}^0$, folglich der relative Maximalwerth von $E\varepsilon$:

$$= \frac{m-1}{2m}(\sigma_x{}^0+\sigma_y{}^0) \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_x{}^0-\sigma_y{}^0)^2+4(max.\,\tau_z)^2}.$$

---

*) Den obigen Bedingungen für die Constante C liesse sich allgemeiner dadurch entsprechen, dass statt $a^4 + b^4$ im Nenner des Ausdrucks von z gesetzt würde:

$$(a^n+b^n)^{\frac{4}{n}};\ \text{z. B. } (a^2+b^2)^2 \text{ oder } (a+b)^4.$$

Allein dann ergäbe sich für die quadratische Platte z_0 nur $\frac{1}{2}$ resp. $\frac{1}{8}$ so gross, wie oben gefunden, was namentlich im Vergleich mit der kreisförmigen Platte unmöglich erscheinen würde.

Letzterer ist stets kleiner, als der grössere der beiden Maximalwerthe von $E\varepsilon_x$ und $E\varepsilon_y$, z. B. für $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = 0$

$$\text{nur} = \frac{m+1}{m} \cdot max. \tau_z = \frac{8}{27} \frac{2a^2b^2}{a^4+b^4} \frac{ab}{h^2} p$$

$= \frac{8}{27} \frac{b}{a} \times$ **dem grösseren der beiden Werthe** $max.(E\varepsilon_x)$ **und** $max.(E\varepsilon_y)$,

falls $a > b$ ist. Hiernach lässt sich auch zwischen $x^2 = \frac{1}{3} a^2$, $y^2 = \frac{1}{3} b^2$ und $x^2 = a^2$, $y^2 = b^2$ keine wesentlich grössere Anstrengung erwarten, sondern der grössere der Maximalwerthe von ε_x und ε_y als das absolute Maximum von ε betrachten.*)

306. — In einem parallelepipedischen Kasten, dessen Kantenlängen $= 2a$, $2b$ und $2c$ sind und dessen 6 Wände die gleiche, im Vergleich mit a, b und c kleine Dicke h haben, befinde sich eine Flüssigkeit, welche auf die Innenfläche des Kastens den specifischen Ueberdruck p ausübt. Dann ist für die beiden Wände mit den Dimensionen $2a$ und $2b$, wenn man annimmt, dass der Totaldruck auf jede Wand sich gleichförmig auf ihren Umfang vertheilt, indem er die angrenzenden 4 Wände als Zugkraft in Anspruch nimmt:

$$\sigma_x^0 = \frac{2b \cdot 2c}{4(b+c)h} p = \frac{bc}{(b+c)h} p; \quad \sigma_y^0 = \frac{ac}{(a+c)h} p.$$

Ist $a > b$, so ist $\sigma_y^0 > \sigma_x^0$ und somit nach Nr. 305:

$$max.(E\varepsilon) = max.(E\varepsilon_y) = \left(\frac{a}{a+c} - \frac{1}{m}\frac{b}{b+c}\right)\frac{c}{h} p + \frac{2a^4}{a^4+b^4}\frac{b^2}{h^2} p.$$

Mit Vertauschung der Buchstaben a, b, c kann hiernach für jede Kastenwand die grösste Anstrengung berechnet werden; sie findet immer statt an der Innenfläche der Wand in der Mitte der längeren Seiten des Umfangs.

Bei einem würfelförmigen Kasten ($a = b = c$) ist insbesondere:

$$max.(E\varepsilon) = \left(\frac{m-1}{2m} + \frac{a}{h}\right)\frac{a}{h} p, \text{ näherungsweise } = \frac{a^2}{h^2} p;$$

würde derselbe durch ein kugelförmiges Gefäss von gleichem Inhalte und gleicher Wanddicke ersetzt, so wäre die Anstrengung seiner Wand näherungsweise (cf. Nr. 268):

$$max.(E\varepsilon) = k = \frac{1}{m}\frac{r}{h} p = \frac{1}{m}\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\frac{a}{h} p,$$

also nur $\frac{1}{m}\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \cdot \frac{h}{a}$, insbesondere mit $m = 3$ nur ca. $\frac{4}{11}\frac{h}{a}$ so gross wie bei dem würfelförmigen Kasten.

---

*) Diese Resultate, wenn sie auch nicht streng begründet sind, weichen von der Wahrheit doch ohne Zweifel nur wenig ab. Für die am Rande eingeklemmte quadratische Platte ergiebt sich danach eine grösste Anstrengung, die kaum verschieden ist von derjenigen, welche in Nr. 302 für die in quadratisch angeordneten Punkten festgehaltene unendliche Platte gefunden wurde, und es ist deshalb auch die in Nr. 303 ausgeführte Berechnung der Wände des Feuerkastens einer Locomotive nicht wesentlich fehlerhaft mit Rücksicht auf den Umstand, dass diese Wände von endlicher Grösse und am Rande als eingeklemmt zu betrachten sind.

ACHTES CAPITEL.

Arbeit der inneren Kräfte.

A. Allgemeine Aufgabe.

307. — Die Aufgabe besteht im Allgemeinen darin, die Arbeit oder Wirkungsgrösse A zu berechnen, welche zu einer gegebenen kleinen Deformation eines gegebenen Körpers aufgewendet werden muss und welche also der Körper infolge der letzteren in sich aufnimmt. Gegeben sei diese Deformation des auf rechtwinkelige Coordinatenaxen bezogenen Körpers durch die Ausdehnungen und Verschiebungen:

$$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_z$$

nach den Richtungen dieser Axen in jedem Punkte x, y, z nebst den dadurch mitbestimmten Spannungen:

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z.$$

Ist V das Volumen, $dV = dx\,dy\,dz$ ein parallelepipedisches Volumenelement des Körpers, so ist A = der Summe der Deformationsarbeiten dA für alle Volumenelemente dV zusammen; dA aber besteht aus den Incrementen δdA, welche den Differentialen

$$\delta\varepsilon_x \quad \delta\varepsilon_y \quad \delta\varepsilon_z \quad \delta\gamma_x \quad \delta\gamma_y \quad \delta\gamma_z$$

d. h. allen unendlich kleinen Incrementen der stetig zunehmenden Deformation von dV entsprechen. Die auf die Zeit als Urvariable sich beziehenden Differentiale der die Deformation betreffenden Grössen sind dabei mit δ bezeichnet zum Unterschiede von den Differentialen d, welche sich auf die räumlichen Verhältnisse des ursprünglichen Körpers beziehen.

Somit ergiebt sich sofort:

$$A = \int dV \int (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_x \delta\gamma_x + \tau_y \delta\gamma_y + \tau_z \delta\gamma_z),$$

wobei das erste Integral über den ganzen Körper auszudehnen ist, während das andere aus 6 Theilen besteht, die beziehungsweise zwischen den Grenzen 0 und σ_x, ε_x, 0 und σ_y, ε_y etc. zu nehmen sind.*)

---

*) Derjenige Bestandtheil von δdA z. B., welcher der augenblicklichen Spannung σ_x, also der totalen Spannung $\sigma_x dy\,dz$ von dV im Sinne der x-Axe entspricht, ist

$$\sigma_x dy\,dz\,\delta(dx.\varepsilon_x) = \sigma_x dy\,dz\,.\,dx\,\delta\varepsilon_x = dV.\,\sigma_x\delta\varepsilon_x \text{ etc.}$$

Derjenige Bestandtheil von δdA, welcher der Spannung τ_x, also der totalen Tangential-

Der zwischen den 12 Grössen ε, γ, σ, τ stattfindende Zusammenhang gestattet in jedem Falle, auch umgekehrt diese Grössen einzeln zu berechnen, wenn die Arbeit A und die Art der dadurch hervorgebrachten Deformation gegeben sind.

308. — Ist der Körper isotrop, und setzt man dann in dem allgemeinen Ausdrucke von A nach Nr 227:

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{m-2}\right); \quad \sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{m-2}\right); \quad \sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{m-2}\right),$$

worin $\mu = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ ist, ferner

$$\tau_x = G\gamma_x; \quad \tau_y = G\gamma_y; \quad \tau_z = G\gamma_z,$$

so liefert die Ausführung der Integration in Beziehung auf ε und γ:

$$A = G\int\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu^2}{m-2} + \frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}{2}\right) dV$$

als Ausdruck der inneren Arbeit durch die Ausdehnungen und Verschiebungen im Zustande der grössten Deformation.

Ist nur die Art der Deformation gegeben, so lassen sich die 6 Grössen ε und γ für alle Punkte des Körpers durch eine dieser Grössen für einen Punkt des Körpers ausdrücken; sie sind also, wenn auch noch A gegeben ist, alle durch obige Gleichung bestimmt, somit auch nach Nr. 229, Gl. (III, a) die Hauptausdehnungen für alle Körperpunkte und dadurch schliesslich die grösste Ausdehnung ε, welche durch die auf den Körper einwirkende Arbeit A in irgend einem seiner Punkte nach irgend einer Richtung hervorgerufen wird.

309. — Um die innere Arbeit des isotropen Körpers durch die Spannungen im Zustande der grössten Deformation ausgedrückt zu erhalten, hat man in dem allgemeinen Ausdrucke (Nr. 307) nach Nr. 227 zu setzen:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}\right); \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right)$$

$$\text{und } \gamma_x = \frac{1}{G}\tau_x; \quad \gamma_y = \frac{1}{G}\tau_y; \quad \gamma_z = \frac{1}{G}\tau_z.$$

Die Ausführung der Integration nach σ und τ giebt dann:

$$A = \frac{1}{2E}\int\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m}(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\right) dV +$$

$$+ \frac{1}{2G}\int(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\, dV.$$

---

spannung $\tau_x dx dy$ in dem einen oder $\tau_x dx dz$ in dem anderen Paare der der x-Axe parallelen Seitenflächen von dV entspricht, ist:

$$\left.\begin{array}{r} \tau_x dx dy\, \delta(dz \cdot \gamma_x) = \tau_x dx dy \cdot dz\, \delta\gamma_x \\ \text{oder } \tau_x dx dz\, \delta(dy \cdot \gamma_x) = \tau_x dx dz \cdot dy\, \delta\gamma_x \end{array}\right\} = dV \cdot \tau_x \delta\gamma_x \text{ etc.}$$

Ist nur die Art der Deformation resp. die Art der Einwirkung der Arbeit A gegeben, so lassen sich die 6 Grössen σ und τ für alle Punkte des Körpers durch eine dieser Grössen für einen Punkt des Körpers ausdrücken; sie sind also, wenn auch noch A gegeben ist, wieder alle durch obige Gleichung bestimmt, somit auch nach Nr. 229, Gl. (III) und (V) die Hauptspannungen für alle Körperpunkte, und damit auch wieder die grösste Ausdehnung ε, welche in dem Körper durch die auf ihn einwirkende Arbeit A hervorgerufen wird.

310. — Die vorhergehenden Formeln finden vorzugsweise Anwendung zur Beurtheilung der sogenannten Stosselasticität und Stossfestigkeit, d. h. zur Berechnung der Anstrengung, welche ein Körper erleidet, wenn eine gewisse Wirkungsgrösse in Form von lebendiger Kraft eines bewegten anderen Körpers stossweise (plötzlich) auf ihn einwirkt. Diese Rechnung ist freilich, wie die folgenden allgemeinen Vorbemerkungen erkennen lassen, aus verschiedenen Gründen unsicher.

Wenn zwei freie Massen m und m_1, welche blosse Progressivbewegungen haben (Bewegungen mit gleichen und gleich gerichteten Geschwindigkeiten aller Punkte), so zusammentreffen, dass im Augenblicke der Berührung ihre Schwerpunkte in der Stosslinie (der gemeinschaftlichen Normalen beider Körperoberflächen an der Berührungsstelle) liegen (centraler Stoss), und wenn c und c_1 ihre anfänglichen Geschwindigkeitscomponenten nach der Stosslinie sind (die grössere c absolut genommen, die kleinere c_1 positiv oder negativ, jenachdem sie gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist wie c), so ist bekanntlich zu Ende der ersten Periode des Stosses, d. h. in dem Augenblicke, in welchem der gegenseitige Druck beider Körper am grössten geworden ist und beide dieselbe Geschwindigkeit $v = \frac{mc + m_1 c_1}{m + m_1}$ nach der Richtung des Stosses (der Richtung von c) angenommen haben, die lebendige Kraft

$$L = \frac{1}{2} \frac{m m_1}{m + m_1} (c - c_1)^2$$

als solche verloren gegangen, nämlich zur Deformation der beiden Körper verwendet worden. Haben diese Körper im Augenblicke des Zusammentreffens eine andere, als die oben vorausgesetzte, den centralen Stoss charakterisirende relative Lage, haben sie ferner nicht blosse Progressivbewegungen oder sind sie gar nicht frei beweglich, so beziehen sich die Geschwindigkeiten c, c_1 und v nur auf ihre der Berührungsstelle zunächst liegenden materiellen Punkte und m, m_1 bedeuten dann nicht die wahren, sondern die auf jene Stelle reducirten Massen, welche rechnungsmässig je nach den Umständen aus den wahren Körpermassen abgeleitet werden müssen. Wäre z. B. die stossende Masse mit der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Axe drehbar, welche mit dem kürzesten Abstande a senkrecht zur Stosslinie und in Beziehung auf welche das Trägheitsmoment dieser Masse $= J$ ist, so wäre $c = a\omega$ und $m = \frac{J}{a^2}$ zu setzen.

311. — Was den gestossenen Körper betrifft, so ist derselbe in den hier in Betracht kommenden Fällen gewöhnlich vor dem Stosse in Ruhe ($c_1 = 0$) und ausserdem so gestützt oder befestigt, dass die getroffene Stelle seiner Oberfläche nicht ohne Deformation des Körpers ausweichen kann. Während diese Deformation sich vollzieht, haben seine verschiedenen Punkte verschiedene Geschwindigkeiten, welche von der getroffenen Stelle aus nach den Unterstützungspunkten hin abnehmen, und es bedeutet deshalb in den Formeln:

$$v = \frac{mc}{m + m_1}; \quad L = \frac{m m_1}{m + m_1} \frac{c^2}{2}$$

m_1 die auf die Stelle des Stosses reducirte Masse des gestossenen Körpers, d. h. diejenige Masse, welche, wenn sie an dieser Stelle concentrirt wäre, dieselbe lebendige Kraft hätte, welche alle Massenelemente des Körpers zusammengenommen in demselben Augenblicke thatsächlich besitzen. Hier nun tritt eine erste Schwierigkeit und Unsicherheit auf, welche darauf beruht, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des empfangenen Impulses eine gewisse endliche Grösse hat, so dass derjenige Theil des gestossenen Körpers, dessen Punkte während der kleinen Dauer der in Rede stehenden Stossperiode überhaupt eine Geschwindigkeit empfangen, bei verhältnissmässig grossen Dimensionen dieses Körpers sich vielleicht gar nicht bis zu den Unterstützungspunkten erstreckt, sowie es bei kleineren Dimensionen auch umgekehrt der Fall sein kann, dass der Impuls (die Geschwindigkeitsmittheilung) sich durch die Unterstützungs- oder Befestigungsstellen hindurch bis in die Widerlager, welche selbst elastische, mehr oder weniger nachgiebige Körper sind, hinein erstreckt. In Ermangelung von Anhaltspunkten zur rationellen Berücksichtigung dieser Verhältnisse kann man die reducirte Masse m_1 auf Grund der Annahme berechnen, dass der Geschwindigkeitsimpuls sich gerade bis zu den Stützpunkten, nicht darüber hinaus, erstreckt, und ferner die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte denjenigen Verrückungen proportional setzen, welche sie im Gleichgewichtszustande, d. h. bei ruhiger Belastung durch eine äussere Kraft erleiden würden, die in Beziehung auf Richtung und Angriffspunkt mit dem durch den Stoss entwickelten äusseren Drucke gleichartig ist. Immerhin aber ist diese Berechnungsweise nur als Nothbehelf zu betrachten, und kann man dabei m_1 zu gross oder zu klein finden, jenachdem die Stelle des Stosses von den Unterstützungsstellen mehr oder weniger weit entfernt ist.

Hätte das fest verbundene System der Widerlager eine unabänderliche eigene Progressivbewegung, während der von ihnen unterstützte Körper durch den anderen gestossen wird, so würde im Obigen sich nichts ändern, als dass unter den sämmtlichen Geschwindigkeiten die relativen Geschwindigkeiten gegen dieses System der Widerlager zu verstehen wären.

312. — Wenn die Dauer der in Rede stehenden ersten Periode des Stosses, in welcher die lebendige Kraft L als solche verschwindet, auch gross genug ist, um in allen Punkten beider Körper Geschwindigkeitsände-

rungen von endlicher Grösse hervorzubringen, indem an der Stelle des Stosses und nach der Richtung desselben die Geschwindigkeiten beider Körper einander gleich $= v$ geworden sind, während die entsprechenden Geschwindigkeiten der übrigen Punkte des gestossenen Körpers durch seine Gestalt und Unterstützungsweise, des stossenden Körpers durch seine Bewegungsart mit Rücksicht auf die wieder eingetretene relative Ruhe seiner sämmtlichen Punkte bestimmt sind, so ist diese Zeitdauer doch zu klein, als dass während derselben alle Massenelemente auch Ortsveränderungen von messbarer Grösse erfahren könnten. Die Wirkung der verlorenen lebendigen Kraft L beschränkt sich deshalb fast ausschliesslich auf eine Compression, überhaupt eine relative Verrückung der materiellen Punkte in den der Berührungsstelle zunächst liegenden Theilen beider Körper, deren Massen so klein sind, dass ihre Trägheitskräfte auch bei den sehr grossen Beschleunigungen bewältigt werden können, womit diese Verrückungen während der sehr kleinen Zeitdauer vor sich gehen müssen. Entsprechend den kleinen Räumen, über welche sie sich erstrecken, sind diese Verrückungen selbst um so bedeutender, mit mehr oder weniger beträchtlicher Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze verbunden, so dass sie während der zweiten Periode des Stosses auch nur zum Theil, meistens zum kleineren Theil wieder rückgängig werden. Ein Theil von L bleibt deshalb als lebendige Kraft definitiv verloren; durch eine entsprechende Temperaturerhöhung giebt sich dieser Verlust zu erkennen.

Der sogenannte Elasticitätscoefficient λ, welcher angiebt, ein wie grosser Theil $= \lambda L$ der lebendigen Kraft L in der zweiten Periode des Stosses wiedergewonnen wird und welcher somit den Vollkommenheitsgrad der Elasticität des Stosses misst, lässt sich indessen für bestimmte Fälle kaum mit einiger Sicherheit angeben, um so weniger, als er nicht nur vom Material, sondern ohne Zweifel auch mehr oder weniger von der Gestalt der Körper und ihrer relativen Lage beim Stosse, sowie von der Energie des letzteren, d. h. von den Massen und von der Geschwindigkeit c abhängt. Wenn man sonach genöthigt ist, einen der beiden Grenzfälle $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ vorauszusetzen, so empfiehlt sich dazu am meisten der erstere, welchem das wahre Verhalten in den meisten Fällen erfahrungsmässig viel näher kommt, als dem anderen. Mit dieser Voraussetzung eines unelastischen Stosses vermeidet man zugleich eine Schwierigkeit, welche darin besteht, dass anderenfalls im weiteren Verlaufe des Stosses die Körper sich trennen und deshalb noch nachfolgende Stösse in Betracht gezogen werden müssten, sofern nicht etwa der stossende Körper aufgefangen wird, bevor er einen neuen Stoss auszuüben im Stande ist.*)

*) Der in Rede stehende Verlust an Wirkungsgrösse beschränkt sich natürlich auf einen Stoss im gewöhnlichen Sinne des Worts, d. h. zwischen zwei ursprünglich von einander unabhängigen, getrennten Körpern; er findet nicht statt, wenn beide Körper, fest zusammenhängend, gewissermassen nur Theile eines einzigen Körpers sind, wie z. B. bei dem im weiteren Sinne auch so zu nennenden Stosse, welchen der Schwungring eines Schwungrades auf dessen Arme ausübt, wenn die Welle durch ein Hinderniss plötzlich in ihrer Bewegung gehemmt wird.

313. — Die übrig gebliebene Wirkungsgrösse:

$$W = \frac{mc^2}{2} - L = (m + m_1)\frac{v^2}{2} = \frac{m^2}{m + m_1}\frac{c^2}{2}$$

wird nun, indem beide Körper in gegenseitiger Berührung ihre Bewegung fortsetzen, bis mit dem Eintritt der momentanen Ruhe die grösste Deformation in allen Theilen erreicht ist, nicht nur vom gestossenen Körper in sich aufgenommen, sondern auch von dessen Widerlagern sowie vom stossenden Körper.

Die Deformation des stossenden Körpers entspricht dem Gleichgewichte zwischen den Trägheitskräften seiner Massenelemente und dem vom anderen Körper ausgeübten Gegendrucke; die dazu verwendete Arbeit lässt sich in der Regel leicht berechnen, kann aber als durch die vernachlässigte Wirkungsgrösse λL compensirt betrachtet werden, wenn dieser Körper im Vergleich mit dem gestossenen Körper klein ist.

Grössere Schwierigkeit verursacht die Nachgiebigkeit der Widerlager, welche ohne Zweifel einen um so grösseren Theil der ganzen disponiblen Arbeit in sich aufnehmen, je grösser die Stützflächen und je weniger sie von der unmittelbar gestossenen Körperstelle entfernt sind, je kleiner überhaupt der gestossene Körper ist. Dieser Theil kann z. B. verhältnissmässig gering sein bei einem langen Seile, welches einerseits befestigt ist und anderseits stossweise belastet wird; dagegen ist er bedeutend für ein auf einem Ambos als Widerlagskörper gehämmertes Arbeitsstück, ja vielleicht noch bedeutend für den als gestossenen Körper betrachteten Ambos in Beziehung auf sein Fundament, worauf er mit einer grossen Grundfläche ruht.

Die Schwierigkeit wächst, wenn die Widerlager, wie es streng genommen nöthig ist, im weitesten Sinne aufgefasst werden, in welchem sie mit ihren eigenen Widerlagskörpern in letzter Reihe den ganzen Erdkörper umfassen. Um in diesem Sinne ihren Einfluss zu berücksichtigen, müsste man im Stande sein, das Gesetz zu ermitteln, nach welchem sich infolge eines auf einen begrenzten Theil der Oberfläche eines unbegrenzten Körpers ausgeübten Drucks die Spannungen im Inneren desselben verbreiten. Meistens sieht man sich deshalb genöthigt, den Einfluss der Nachgiebigkeit der Widerlager unberücksichtigt zu lassen und sich mit der allgemeinen Bemerkung zu begnügen, dass dadurch die gesuchte Anstrengung des gestossenen Körpers in einem nicht näher nachweisbaren Grade zu gross gefunden wird.

314. — Besondere Erwähnung verdient eine Stosswirkung, welche darin besteht, dass ein Körper plötzlich der Einwirkung der ihn belastenden Kräfte überlassen wird, ohne dass dabei ein Stoss im gewöhnlichen Sinne stattfände, bei welchem zwei ursprünglich getrennte Körper mit einer gewissen relativen Normalgeschwindigkeit zusammentreffen; wenn vielmehr auch im vorliegenden Falle die Belastung des gegebenen Körpers durch Vermittelung eines anderen geschieht, so waren doch beide von Anfang an in gegenseitiger Berührung und relativer Ruhe und es wird nur der be-

lastende Körper plötzlich der Einwirkung der an ihm wirkenden Kräfte überlassen. Dieser Fall findet z. B. statt, wenn ein Gewicht, wodurch eine vertical stehende Säule von Oben belastet werden soll, in Berührung mit ihrer oberen Fläche plötzlich losgelassen wird, nachdem es bis dahin unabhängig von der Säule unterstützt war; oder wenn das eine Röhre oder ein sonstiges ringsum geschlossenes Gefäss ganz erfüllende Wasser, welches Anfangs nur vermöge seines eigenen Gewichts einen unwesentlichen Druck auf die Gefässwand ausübte, durch Oeffnung eines Schiebers etc. plötzlich mit einer darüber stehenden Wassersäule in Communication gesetzt wird u. s. w.

In allen diesen Fällen ist die Anstrengung des belasteten Körpers doppelt so gross, als bei ruhiger Belastung durch dieselben Kräfte. Im Zustande des Gleichgewichts oder der Ruhe ist nämlich der auf irgend einen Punkt der Körperoberfläche ausgeübte Druck der entsprechenden Durchbiegung (Verrückung des gedrückten Punktes im Sinne des Drucks) proportional, falls die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wurde, so dass, wenn P jener Druck, p die Durchbiegung im Zustande der grössten Deformation ist, der stetig von Null an gewachsene Druck die Arbeit $\frac{Pp}{2}$ verrichtet hat, welche der inneren Arbeit A gleich ist. In der That aber wurde diese Arbeit dadurch geleistet, dass der Angriffspunkt der constanten äusseren Kraft P_1 den Weg p im Sinne von P_1 durchlief, und aus der Gleichung $\frac{Pp}{2} = P_1 p$ ergiebt sich sonach: $P = 2P_1$.

Kann der Körper, wenn die plötzlich hergestellte Belastung demnächst andauert, dem empfangenen Antriebe frei folgen, so wird er in Schwingungen versetzt, wobei seine Anstrengung in den äussersten Lagen abwechselungsweise = Null und eben doppelt so gross, als bei ruhiger Belastung (dem Gleichgewichtszustande) ist.

B. Besondere Fälle.

I. Stabförmiger Körper.

a. Arbeit der Zug- oder Druck-Elasticität.

315. — Wenn ein gerader stabförmiger Körper nach der Richtung seiner Axe, welche als x-Axe genommen werden möge, gezogen oder gedrückt wird, so sind ausser σ_x alle übrigen in Nr. 307 genannten Spannungen = Null. Mit $\sigma_x = \sigma$, $\varepsilon_x = \varepsilon$ und $\sigma = E\varepsilon$, unter E den Elasticitätsmodul nach der Axrichtung verstanden, hat man folglich:

$$A = \frac{E}{2}\int \varepsilon^2 dV = \frac{1}{2E}\int \sigma^2 dV.$$

Ist der Querschnitt constant, so sind auch σ und ε constant, folglich:

$$A = \frac{E\varepsilon^2}{2} V = \frac{\sigma^2}{2E} V.$$

Die Arbeit, welche der Körper dann insbesondere bis zur sogenannten Elasticitätsgrenze durch Zug oder Druck in sich aufzunehmen vermag, ist:

$$A' = \alpha' V \text{ resp. } A'' = \alpha'' V,$$

$$\text{wenn } \alpha' = \frac{E(\varepsilon')^2}{2}; \quad \alpha'' = \frac{E(\varepsilon'')^2}{2} \quad \text{(cf. Nr. 4)}$$

gesetzt wird. Für α' und α'' (Arbeitsgrössen pro Cubikcentimeter, ausgedrückt in Kilogramm-Centimetern) ergeben sich mit den Mittelwerthen von E, (ε') und (ε'') nach Nr. 14 beispielsweise die folgenden Werthe:

	E	(ε')	(ε'')	α'	α''
Holz (Faserrichtung)	112000	0,0018	0,0015	0,181	0,126
Gusseisen	1000000	0,00075	0,0015	0,281	1,125
Stahl	2500000	0,0017	—	3,612	—
Schmiedeeisen	2000000	0,0007	0,0007	0,490	0,490
Eisenblech	1750000	0,0008	0,0008	0,560	0,560
Eisendraht	2000000	0,0012	—	0,720	—

Wenn der gerade stabförmige Körper von constantem Querschnitte am einen Ende festgehalten ist, während er am anderen gestossen wird, so ist seine auf die Stossstelle reducirte Masse (Nr. 311): $m_1 = \frac{1}{3} M$, unter M die wahre Masse des Körpers verstanden.

Wenn ein solcher Körper nach der Richtung seiner Länge frei beweglich ist und gegen einen anderen stösst, so nehmen im Zustande grösster Deformation ε und σ proportional dem Abstande von der freien Hinterfläche bis zur stossenden Vorderfläche zu, und wenn ε und σ die Maximalwerthe sind, so ist die entsprechende Arbeit:

$$A = \frac{E\varepsilon^2}{6} V \doteq \frac{\sigma^2}{6E} V.$$

316. — Ist der Querschnitt F nicht constant, so sind σ und ε von einem zum anderen veränderlich und zwar demselben umgekehrt proportional:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{F_0}{F},$$

unter σ_0 und ε_0 die Werthe von σ und ε im Querschnitte F_0 verstanden. Mit $dV = F dx$ wird dann

$$A = \frac{E\varepsilon_0^2}{2} F_0^2 \int \frac{dx}{F} = \frac{\sigma_0^2}{2E} F_0^2 \int \frac{dx}{F},$$

wobei die Integrale über die ganze Länge l des Körpers auszudehnen sind.

Ist insbesondere F eine ganze algebraische Function 2ten Grades des Abstandes x von einem in der Axe angenommenen festen Punkte:

$$F = a + bx + cx^2,$$

worunter z. B. alle Umdrehungskörper, entstanden durch Umdrehung einer Fläche 2ten Grades um eine ihrer Hauptaxen, sowie auch namentlich alle Prismoide begriffen sind, d. h. Körper, welche

dadurch entstanden gedacht werden können, dass ein veränderliches ebenes n-Eck, dessen Eckpunkte in beliebigen festen Geraden bleiben, parallel einer festen Ebene sich fortbewegt, so ist, jenachdem

$$\varDelta = 4ac - b^2$$

positiv oder negativ ist,

$$\int \frac{dx}{F} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\varDelta}}\left(arc.tg\dfrac{b+2cl}{\sqrt{\varDelta}} - arc.tg\dfrac{b}{\sqrt{\varDelta}}\right) \\ \dfrac{2}{\sqrt{-\varDelta}}\left(arc.cotg\dfrac{b}{\sqrt{-\varDelta}} - arc.cotg\dfrac{b+2cl}{\sqrt{-\varDelta}}\right). \end{cases}$$

Sind F_0 und F_1 die Endflächen oder Querschnitte an den Enden des Körpers, F der Querschnitt in der Mitte, und ist x der Abstand eines beliebigen Querschnitts von F_0, so ist:

$$a = F_0;\; b = \frac{-3F_0 + 4F - F_1}{l};\;\; c = 2\frac{F_0 - 2F + F_1}{l^2}$$

$$\varDelta = \frac{1}{l^2}[4F_0F_1 - (4F - F_0 - F_1)^2].$$

Zur Gruppe der Prismoide gehören als besonderer Fall die pyramidalen Körper; für solche ist:

$$\sqrt{F} = \frac{\sqrt{F_0} + \sqrt{F_1}}{2};\;\; \varDelta = 0$$

und das zunächst in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheinende Integral findet man einfach:

$$\int \frac{dx}{F} = \frac{l}{\sqrt{F_0F_1}},$$

womit $A = \frac{E\varepsilon_0^2}{2} lF_0 \sqrt{\frac{F_0}{F_1}} = \frac{\sigma_0^2}{2E} lF_0 \sqrt{\frac{F_0}{F_1}}$ wird.

Ist F_0 die kleinere Endfläche, so sind σ_0 und ε_0 die grössten Werthe von σ und ε, also massgebend für die Wirkungsgrösse, welche der Körper durch seine Ausdehnung oder Zusammendrückung ohne Gefahr einer übermässigen Anstrengung in sich aufnehmen kann, und man erkennt, dass mit Rücksicht hierauf die Zugabe an Masse, d. h. die Vergrösserung des Querschnitts, nach dem anderen Ende hin nicht nur unnütz, sondern sogar schädlich sein würde, indem A bei gleichen Werthen von l und ε_0 im Verhältnisse $\sqrt{F_0} : \sqrt{F_1}$ kleiner wäre, als bei constantem Querschnitte F_0.*) —

Ist μ die specifische Masse des Körpers, und ist derselbe mit der Endfläche F_1 festgehalten, während er an der anderen F_0 gestossen wird, so ist seine auf letztere Endfläche reducirte Masse (Nr. 311):

$$m_1 = \mu\int_0^l F\left(\frac{X}{L}\right)^2 dx;\; \text{wo } X = \int_0^x \frac{dx}{F} \text{ und } L = \int_0^l \frac{dx}{F}$$

*) Wenn ein gestossener Körper sich gegen einen Widerlagskörper von unbegrenzter Ausdehnung stützt (z. B. die Holzunterlage des Ambosses eines Dampfhammers gegen den

gesetzt und unter x der Abstand des beliebigen Querschnitts F von F_1 verstanden ist. Für den pyramidalen Körper insbesondere (ganze Masse $= M$) ist:

$$m_1 = \frac{\mu F_0 l}{3} = \frac{F_0}{F_0 + \sqrt{F_0 F_1} + F_1} M,$$

d. h. eben so gross wie für einen prismatischen Körper von gleicher Länge und vom Querschnitte F_0 (cf. Nr. 315).

317. — Spannung eines Förderseils beim Anlassen der Maschine. Wenn, nachdem das Förderseil eines Schachtes oder einer Strecke an das ruhende Fördergefäss angeschlagen resp. der beladene Wagen auf die am Seile beständig befestigte Förderschale aufgefahren ist, die Maschine angelassen wird, so stellt sich in dem Anfangs schlaffen Seile eine schnell, aber stetig wachsende Spannung her, welche demnächst wieder abnimmt und infolge von Oscillationen mehr und mehr die dem Zustande ruhiger Belastung entsprechende Grösse annimmt. Der Vorgang ist nicht einem Stosse im gewöhnlichen Sinne zu vergleichen, und es ergiebt sich vielmehr die Maximalspannung am deutlichsten durch die folgende Ueberlegung. Es sei:

$\frac{P}{g}$ die in Bewegung zu setzende träge Masse,

P_1 der Widerstand im Beharrungszustande (bei einem seigeren Schachte $=$ dem Gewichte P der belasteten Förderschale, sonst aber $< P$),

c die Geschwindigkeit, l die Länge, F der Querschnitt,

E der Elasticitätsmodul des Seils.

Nach der Zeit t, von dem Augenblicke an gerechnet, in welchem das Seil gerade gestreckt, aber noch nicht gespannt ist (abgesehen von seinem eigenen Gewichte, welches überhaupt hierbei ausser Betracht bleiben soll), habe das Fördergefäss den Weg s zurückgelegt und sei die totale Spannung des Seils $= S$ geworden; dann ist:

$$\frac{P}{g}\frac{d^2 s}{dt^2} = S - P_1.$$

In demselben Augenblicke hat sich das Seil um $ct-s$ verlängert, und es ist deshalb:

$$S = \frac{ct-s}{l} EF = \frac{ct-s}{\lambda} P, \text{ wenn } \lambda = \frac{Pl}{EF}$$

Erdboden), so erstreckt sich die Stosswirkung auf einen Theil des Widerlagskörpers von unbestimmter Länge (Höhe) l, dessen Querschnitt von der Stützfläche F_0 aus nach irgend einem Gesetze bis F_1 zunimmt. Nimmt man an, dieser Körpertheil habe eine pyramidale Form, und bezeichnet mit h die Höhe der Ergänzungspyramide, so ist

$$\sqrt{\frac{F_0}{F_1}} = \frac{h}{l+h} = \frac{h}{l}, \text{ wenn } l \text{ viel } > h.$$

Würde also dieser Körpertheil nur comprimirt, so wäre

$$A = \frac{\sigma_0^2}{2E} F_0 h$$

die von ihm aufgenommene Arbeit, und wenn auch thatsächlich diese Deformation nicht ohne Verschiebungen vor sich gehen kann, so erkennt man doch wenigstens die Möglichkeit, dass eine unendlich grosse Widerlagsmasse nur eine endliche Arbeit in sich aufnimmt, obschon die Stützfläche eine endliche Verrückung erleidet.

gesetzt wird; dieses λ ist die der Spannung P entsprechende Verlängerung des Seils. Hiernach ist auch:

$$\frac{1}{g}\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{ct-s}{\lambda} - \frac{P_1}{P}$$

oder $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g}{\lambda}(ct - s - \lambda_1)$, wenn $\lambda_1 = \frac{P_1}{P}\lambda = \frac{P_1 l}{EF}$

= der der Spannung P_1 entsprechenden Verlängerung des Seils gesetzt wird. Die Integration dieser Differentialgleichung giebt, nachdem die beiden Constanten mit Rücksicht darauf bestimmt worden sind, dass

$$t = \frac{\lambda_1}{c};\ s = 0;\ \frac{ds}{dt} = 0$$

zusammengehörige Werthe sein müssen:

$$s = c\left\{t - \frac{\lambda_1}{c} - \sqrt{\frac{\lambda}{g}}\,.\,\sin\left[\left(t - \frac{\lambda_1}{c}\right)\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right]\right\},$$

folglich $\frac{S}{P} = \frac{ct-s}{\lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{c}{\sqrt{g\lambda}}\sin\left[\left(t - \frac{\lambda_1}{c}\right)\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right].$

Der Maximalwerth von S tritt periodisch ein nach den Zeiten:

$$t = \frac{\lambda_1}{c} + (4n+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{g}};\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots.$$

Die dabei ausser Acht gebliebenen Nebenwiderstände sind für das erste Maximum noch unerheblich und es ergiebt sich dasselbe im Verhältnisse zu P:

$$\frac{S}{P} = \frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{c}{\sqrt{g\lambda}}.$$

Bis zum Eintritte dieses Maximums hat (cf. Nr. 315) das Seil die Arbeit:

$$A = \frac{(S:F)^2}{2E}Fl = \frac{S^2 l}{2EF} = \frac{S^2\lambda}{2P} = \frac{P\lambda}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{c}{\sqrt{g\lambda}}\right)^2$$

in sich aufgenommen, wie sich durch eine directe Vergleichung der hierbei in Betracht kommenden Arbeiten und lebendigen Kräfte nicht ohne Schwierigkeit ergeben hätte.

Bei horizontaler Streckenförderung sind P_1 und λ_1 verhältnissmässig klein, und ist also

$$A \text{ nur wenig} > P\frac{c^2}{2g}.$$

Für einen seigeren Schacht als den ungünstigsten Fall ist $P_1 = P$, $\lambda_1 = \lambda$, also:

$$A = \frac{P\lambda}{2}\left(1 + \frac{c}{\sqrt{g\lambda}}\right)^2 = P\left(\frac{\lambda}{2} + c\sqrt{\frac{\lambda}{g}} + \frac{c^2}{2g}\right)$$

$$\text{und } \frac{S}{P} = 1 + \frac{c}{\sqrt{g\lambda}} = 1 + c\sqrt{\frac{1}{g}\frac{EF}{Pl}}.$$

Ist der Durchmesser des Drahtseils der Formel $d = \frac{1}{20}\sqrt{P}$ entsprechend genommen, so ist bei der Belastung P die specifische Spannung des Eisendrahts:

$$\frac{S}{F} = 859 \text{ Kilogr. (cf. Nr. 29)},$$

wobei unter F die Summe der Querschnitte aller Drähte verstanden ist, wie es geschehen muss, wenn $E = 2000000$ (als Mittelwerth für Eisendraht nach Nr. 14) gesetzt wird. Damit wird:

$$\frac{S}{P} = 1 + 48{,}25\frac{c}{\sqrt{gl}},$$

und wenn der Draht nicht bis zur Elasticitätsgrenze angestrengt werden soll, so muss (cf. Nr. 14):

$$\frac{S}{P} < \frac{2400}{859}, \text{ also mit } g = 9{,}81: \; l > 73{,}7c^2$$

Meter sein, unter c die Seilgeschwindigkeit in Metern pro Secunde verstanden. Bei kleineren Seillängen und grösseren Geschwindigkeiten ist eine elastische Verbindung (Stahlfeder oder Kautschukpuffer) zwischen Fördergefäss und Seil zum Schutze des letzteren nöthig; hat dieses elastische Zwischenglied solche Verhältnisse, dass es um eben so viel durchgebogen, resp. zusammengedrückt, wie eine Seillänge l_1 bei gleicher Belastung ausgedehnt wird, so hat es dieselbe Wirkung, als ob das Seil um l_1 länger wäre, als es wirklich ist.

318. — Der Fallbär eines Dampfhammers habe das Gewicht Q; er werde als ein prismatischer Körper vorausgesetzt mit dem Querschnitte F und der Länge l. Der Elasticitätsmodul sei $= E$.

Der Ambos sei von pyramidaler Form; obere (kleinere) Endfläche $= F_0$, untere $= F_1$, Höhe $= l_1$, Gewicht $= Q_1$, Elasticitätsmodul $= E_1$. Er ruhe auf einer Holzunterlage, welche auf der Basis F_2 mit der Höhe l_2 prismatisch aufgebaut ist; das Gewicht dieses Holzkörpers sei $= Q_2$, der Elasticitätsmodul $= E_2$ nach der Richtung l_2, d. h. normal gegen die Faserrichtung der horizontal liegenden Balken.

Wie gross ist der Druck des Holzkörpers auf den Erdboden, wenn der Hammer aus der Höhe h auf die Bahn des Ambosses niederfällt resp. auf ein darauf liegendes Arbeitsstück (in welchem Falle h die Fallhöhe bis zur oberen Fläche des durch den Schlag zusammengedrückten Arbeitsstücks bedeutet)?

Nimmt man an, dass der Stoss im engeren Sinne nur zwischen Fallbär und Ambos stattfindet (d. h. dass in dem Augenblicke, in welchem alle horizontalen Schichten des Fallbärs dieselbe Geschwindigkeit = derjenigen der Bahn des Ambosses angenommen haben, der Geschwindigkeitsimpuls sich nur gerade bis zur Basis F_1 des Ambosses erstreckt), so ist (cf. Nr. 313 und 316) nach Abzug des Verlustes:

$$\lambda L = \frac{Q \cdot \varrho Q_1}{Q + \varrho Q_1} h; \quad \varrho = \frac{F_0}{F_0 + \sqrt{F_0 F_1} + F_1},$$

der bei Vorhandensein eines den Schlag unmittelbar empfangenden Arbeitsstücks fast ausschliesslich zu dessen bleibender Deformation verwendet wird, die übrig bleibende Wirkungsgrösse:

$$W = \frac{Q^2}{Q + \varrho Q_1} h.$$

Dieselbe comprimirt den Fallbär, den Ambos, den Holzkörper und bis zu gewisser Tiefe auch den Erdkörper, von welcher letzteren Wirkung in Ermangelung der nöthigen Anhaltspunkte abstrahirt wird. Sind dann A, A_1 und A_2 die von den drei ersteren Körpern im Augenblicke der grössten Compression aufgenommenen Arbeiten und ist dabei P der Druck in allen Horizontalschnitten von der Basis des Holzkörpers bis zur oberen Fläche des Ambosses (von hier bis zum oberen Ende des Fallbärs nimmt der Druck stetig bis Null ab), so ergiebt sich nach Nr. 315 und 316:

$$A = \frac{P^2 l}{6EF}; \quad A_1 = \frac{P^2 l_1}{2E_1\sqrt{F_0 F_1}}; \quad A_2 = \frac{P^2 l_2}{2E_2 F_2}$$

und hat man also für P die Gleichung:

$$\frac{P^2}{2}\left(\frac{l}{6EF}+\frac{l_1}{E_1\sqrt{F_0F_1}}+\frac{l_2}{E_2F_2}\right)=\frac{Q^2}{Q+\varrho Q_1}h.$$

Die Arbeit der Schwerkraft $Q+Q_1+Q_2$, welche der mit der Compression verbundenen Senkung des gemeinsamen Schwerpunktes aller drei Körper entspricht, kann ohne Zweifel als reichlich aufgewogen betrachtet werden durch die vernachlässigte Arbeit, welche zur Compression des Erdbodens verwendet wird, und welche trotzdem vielleicht verursacht, dass P durch obige Gleichung noch wesentlich zu gross gefunden wird. Der gesuchte Maximaldruck auf den Erdboden ist indessen um Q_1+Q_2 als denjenigen Druck, welcher schon vor dem Stosse vorhanden war, grösser als P.

b. Arbeit der Biegungs-Elasticität.

319. — Ein gerader stabförmiger Körper sei auf irgend eine Weise unterstützt oder befestigt und durch gegebene äussere Kräfte belastet, deren Richtungslinien die als x-Axe angenommene Stabaxe schneiden. Bei Vernachlässigung der Schubkräfte und der durch die unmittelbare Wirkung des Drucks auf die Oberfläche bedingten Pressung sind dann wieder ausser σ_x alle übrigen in Nr. 307 genannten Spannungen = Null, und erhält man wie in Nr. 315 mit $\sigma_x=\sigma$, $\varepsilon_x=\varepsilon$ und $\sigma=E\varepsilon$ die der Biegung entsprechende Arbeit der inneren Kräfte:

$$A=\frac{1}{2E}\int\sigma^2dV.$$

Wenn die Richtungslinien der äusseren Kräfte in einer Symmetrieebene des Körpers liegen und die Stabaxe rechtwinkelig schneiden, so ist, wenn

M das Spannungsmoment, J das Trägheitsmoment eines Querschnitts in Beziehung auf die Biegungsaxe,

dF einen im Abstande η der letzteren parallelen Flächenstreifen des Querschnitts bedeutet,

mit $dV=dFdx$, $\sigma=\frac{M\eta}{J}$ (cf. Nr. 43):

$$A=\frac{1}{2E}\int\frac{M^2}{J^2}dx\int\eta^2dF=\frac{1}{2E}\int\frac{M^2}{J}dx,$$

das Integral auf die ganze Länge des Stabes bezogen.

In der Regel handelt es sich darum, diejenige innere Arbeit zu kennen, welche einer gegebenen Maximalspannung oder Pressung $=k$ entspricht, während nur die Art der Belastung (die Angriffsweise und das Grössenverhältniss der äusseren Kräfte) gegeben ist. Durch eine der äusseren Kräfte $=P$ lassen sich dann alle übrigen, sowie auch $k=max.\left(\frac{Me}{J}\right)$, unter e den grössten Absolutwerth von η für den betreffenden Querschnitt verstanden, ausdrücken, und die Elimination von P liefert A ausgedrückt durch k und durch die gegebenen Elemente, durch welche das Material und die Dimensionen, sowie die Art der Unterstützung resp. Befestigung und der Belastung des Stabes charakterisirt sind.

320. — Erfährt der Stab nur an einer Stelle C einen äusseren Druck, z. B. infolge eines transversalen Stosses, so kann man bemerken, dass die innere Arbeit δA, welche dem unendlich kleinen Zuwachs δp der Durchbiegung p bei C entspricht, natürlich der Arbeit $P\delta p$ des der augenblicklichen Durchbiegung p im Gleichgewichtszustande entsprechenden äusseren Drucks P gleich sein muss, und indem nach den betreffenden Resultaten des zweiten Capitels p und P, P und k nach bekannten Verhältnissen einander proportional sind, erhält man sofort auch

$$A = \int_0^p P\delta p \text{ nach bekanntem Verhältnisse proportional } k^2.$$

Ist insbesondere der Querschnitt constant $= F$ und l die Länge des Stabes, so wird

$$\text{mit } p = \alpha \frac{P}{EJ} l^3: \; A = \alpha \frac{P^2 l^3}{2EJ}$$

oder mit $max. M = \beta Pl$, also $k = \frac{e}{J}\, max. M = \beta Pl \frac{e}{J}$:

$$A = \frac{k^2}{2E} \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{Jl}{e^2}$$

oder endlich mit $J = \gamma Fe^2$ und $Fl = V$:

$$A = \frac{k^2}{2E} \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} V.$$

Dabei sind die Zahlencoefficienten α und β von der Art der Unterstützung des Stabes und von der Lage des Angriffspunktes des äusseren Drucks abhängig, während γ durch die Querschnittsform bestimmt ist.

Ist z. B. der Stab am einen Ende befestigt, am anderen, freien Ende angegriffen, so ist (cf. Nr. 54):

$$\alpha = \frac{1}{3}, \; \beta = 1; \; \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1}{3};$$

ist er beiderseits unterstützt und in den Abständen a und b von den Enden angegriffen, so ist (cf. Nr. 80):

$$\alpha = \frac{a^2 b^2}{3 l^4}, \; \beta = \frac{ab}{l^2}; \; \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1}{3}$$

für jedes Verhältniss $\frac{a}{b}$; ist er beiderseits unter den Richtungswinkeln $=$ Null eingeklemmt und in den Abständen a, b von den Enden angegriffen, so ist, wenn $a \gtreqless b$ (cf. Nr. 63):

$$\alpha = \frac{a^3 b^3}{3 l^6}, \; \beta = \frac{ab^2}{l^3}; \; \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1}{3} \frac{a}{b}.$$

Was γ betrifft, so ist z. B.

für den rechteckigen Querschnitt: $\gamma = \frac{1}{3}$;

" " kreisförmigen oder elliptischen Querschnitt: $\gamma = \frac{1}{4}$;

" " ringförmigen Querschnitt: $\gamma = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)$,

wenn r_1 der innere, r der äussere Radius ist.

321. — Wenn durch ein Hinderniss die **Winkelgeschwindigkeit** w einer **Schwungradwelle** plötzlich um $\frac{w}{n}$ **verkleinert wird**, so wird die überschüssige lebendige Kraft des Schwungrades, nämlich:

$$L = \frac{1}{2} Mv^2 \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{2} M \left(\frac{2n-1}{n^2} v^2\right) = \frac{1}{2} M . \Delta(v^2),$$

unter $v = rw$ die anfängliche Geschwindigkeit der Mittellinie des Schwungringes und unter M die auf letztere reducirte Masse des ganzen Schwungrades verstanden, vorzugsweise auf die **Biegung der Arme** verwendet, und es fragt sich, **einer wie grossen plötzlichen Aenderung von** w **dieselben ohne Gefahr widerstehen können?**

Die Biegung der Arme geschieht auf die in Nr. 69 erörterte und durch Fig. 10 versinnlichte Weise, und es findet bei Voraussetzung eines **constanten Querschnitts** F **der Arme** das grösste Spannungsmoment sowie die grösste specifische Spannung oder Pressung k im Querschnitte bei A zunächst der Nabe statt. Mit Beibehaltung der in Nr. 69 erklärten Bezeichnungen, nur mit dem Unterschiede, dass nicht $\frac{P}{z}$, sondern P den auf die Mittellinie des Ringes reducirten Druck für einen einzelnen Arm bedeuten möge, ist jener Nummer zufolge:

$$-[A] = P(r-a)\frac{2l+3a}{3l+6a},$$

während aus dem allgemeinen Ausdrucke von $[A]$ in Nr. 61 mit

$$P = 0;\ Q = 0;\ \alpha = -\frac{l+a}{a}\beta$$

sich ergiebt:

$$-[A] = \frac{2EJ}{l}\frac{2l+3a}{a}\beta.$$

Die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert:

$$\beta = \frac{P}{6EJ}\frac{al(r-a)}{l+2a},$$

und es ist folglich der Weg des Drucks P:

$$p = r\gamma = r\frac{l}{a}\beta = \frac{P}{6EJ}\frac{l^2r(r-a)}{l+2a}$$

und somit die bis zum Eintritte dieses Drucks P von dem betreffenden Arme aufgenommene Arbeit:

$$A = \int P\partial p = \frac{P^2}{12EJ}\frac{l^2r(r-a)}{l+2a}.$$

Die Elimination von P zwischen dieser Gleichung und

$$k = -[A]\frac{e}{J} = P(r-a)\frac{2l+3a}{3(l+2a)}\frac{e}{J}$$

liefert, wenn $J = \varphi Fe^2$ gesetzt wird:

$$A = \frac{k^2}{2E}\varphi F\frac{3l^2r(l+2a)}{2(r-a)(2l+3a)^2},$$

und es ist dies die vom ganzen Armsysteme bis zum Eintritt der Maximalspannung k aufgenommene Arbeit, wenn jetzt unter F **die Summe der Querschnitte aller Arme** verstanden wird.

Mit durchschnittlich $a = \frac{1}{5}r$, $l = \frac{11}{15}r$ wird:

$$A = 0{,}2676\frac{k^2}{2E}\varphi Fr$$

und mit $\varphi = \frac{1}{3}$ für Arme von **rechteckigem Querschnitte**:

$$A = 0{,}0892 \frac{k^2}{2E} Fr \text{ Kilogramm-Centimeter,}$$

falls Fr in Cubikcentimetern, oder

$$A = 892 \frac{k^2}{2E} Fr \text{ Kilogramm-Meter,}$$

wenn Fr in Cubikmetern ausgedrückt wird, oder endlich:

$$A = \frac{892}{q} \frac{k^2}{2E} Q \text{ Kil.-Mtr.,}$$

wenn q das Gewicht von einem Cubikmeter des Materials und $Q = Frq$ Kil. das Gewicht des ganzen Armsystems, mit dem Querschnitte F von der Axe bis zur Mittellinie des Ringes gerechnet, bedeutet.

Ist nun R das Gewicht des Schwungringes und g die Beschleunigung der Schwere (ebenso wie v auf das Meter und die Secunde als Einheiten bezogen), so ist auch:

$$L = \frac{R + \frac{1}{3} Q}{2g} \Delta(v^2)$$

und aus $A = L$ folgt mit $g = 9{,}81$:

$$\Delta(v^2) = \frac{17500}{q} \frac{k^2}{2E} \frac{Q}{R + \frac{1}{3} Q}.$$

Sollen die Arme nur bis zur **Elasticitätsgrenze** angestrengt werden, so ergiebt sich, wenn $\frac{k^2}{2E}$ dem kleineren der beiden Werthe α' und α'' in Nr. 315 gleich gesetzt wird,

für **gusseiserne Arme** mit $q = 7200$, $\frac{k^2}{2E} = 0{,}281$:

$$\Delta(v^2) = \frac{2n-1}{n^2} v^2 = 0{,}683 \frac{Q}{R + \frac{1}{3} Q}$$

und für **schmiedeeiserne Arme** mit $q = 7800$, $\frac{k^2}{2E} = 0{,}49$:

$$\Delta(v^2) = \frac{2n-1}{n^2} v^2 = 1{,}10 \frac{Q}{R + \frac{1}{3} Q}.$$

Man erkennt hieraus, dass es nur ein sehr kleiner Theil der im Schwungrade gewöhnlich angesammelten lebendigen Kraft ist, welcher ohne Gefahr zur Biegung der Arme verwendet werden kann.*)

---

*) Es sind bei dieser Rechnung nicht nur die in der That hier unwesentlichen Tangentialspannungen vernachlässigt, sondern auch diejenigen Normalspannungen, welche als Folge der Centrifugalkraft schon vor dem Eintritte der Biegung vorhanden waren. Diese Spannungen lassen sich nach Nr. 164 berechnen, und wäre dann k um den entsprechenden Betrag noch kleiner zu setzen. Indessen lässt sich dieser Einfluss im Allgemeinen wohl dadurch als aufgewogen betrachten, dass ein Theil der lebendigen Kraft L zur Verdrehung der Schwungradwelle verbraucht wird.

322. — Ist der Stab als Körper von gleichem Widertande gestaltet, d. h. ist

$$\frac{Me}{J} = k \text{ für alle Querschnitte (cf. Nr. 110),}$$

so ist nach Nr. 319 mit $J = \gamma F e^2$:

$$A = \frac{1}{2E}\int \frac{M^2}{J} dx = \frac{k^2}{2E}\int \frac{J}{e^2} dx = \frac{k^2}{2E}\gamma V,$$

also unabhängig von der Art der Unterstützung und Belastung und bei gegebener Querschnittsform proportional dem Volumen. So können z. B. zwei Stahlfedern, von denen die eine wie der in Nr. 111 (parabolische Feder), die andere wie der in Nr. 312 bestimmte Körper (Dreiecksfeder) gestaltet ist, bei gleichem Volumen V und gegebener Maximalspannung k dieselbe Arbeit A in sich aufnehmen, und zwar bis zur Elasticitätsgrenze mit

$$\gamma = \frac{1}{3} \text{ und } \frac{k^2}{2E} = 3{,}6 \text{ (Nr. 315): } A = 0{,}012\, V$$

Kilogr.-Mtr., wenn V das Volumen in Cubikcentimetern ist.

Ebenso wie die Dreiecksfeder verhält sich auch eine aus mehreren aufeinander gelegten und in der Mitte durch eine Fassung zusammengehaltenen Stahlschienen gebildete sogen. Schichtfeder, wie solche bei Eisenbahnfahrzeugen gebräuchlich sind, eine solche Gestaltung der einzelnen Schienen vorausgesetzt, dass sie, längs der Mittelebene zerschnitten und in ihren Hälften symmetrisch neben einander gelegt, die Körperform Nr. 312 bilden. In Beziehung auf die aufzunehmende Wirkungsgrösse ist es gleichgültig, ob bei gegebenem Volumen eine solche Feder aus vielen dünneren oder aus wenigen dickeren Schienen zusammengesetzt, ob sie ferner länger oder kürzer gemacht wird; von wesentlichem Einflusse sind dagegen diese Umstände auf die Grösse des Drucks P und der Durchbiegung δ, welche der Maximalspannung k entsprechen und welche wegen $A = \frac{P\delta}{2}$ einander selbst bei gegebenem A umgekehrt proportional sind. Wegen

$$P = k\frac{bh^2}{6l} \text{ und } \delta = \frac{6Pl^3}{Ebh^3} \text{ (Nr. 112) ist nämlich auch: } \delta = \frac{kl^2}{Eh},$$

d. h. die Durchbiegung der Schichtfeder proportional dem Quadrate der von der Fassung ab gerechneten Länge l der halben Feder und umgekehrt proportional der Dicke h jeder einzelnen Schiene. Die schwache Krümmung, welche die Schienen im Zustande der Nichtbelastung zu haben pflegen, ändert diese Resultate nicht wesentlich ab.

323. — Wenn auf den geraden stabförmigen Körper ein Stoss im engeren Sinne ausgeübt wird durch eine fremde Masse m, welche ihn senkrecht zur Axe mit der Geschwindigkeit c trifft, so ist zur Berechnung der Wirkungsgrösse, welche bei Voraussetzung eines unelastischen Stosses

übrig bleibt und vorzugsweise zur Biegung des getroffenen Stabes verwendet wird, nämlich:
$$W = \frac{m^2}{m+m_1}\frac{c^2}{2} \text{ (Nr. 313)},$$
die Kenntniss der auf den Stosspunkt reducirten Masse m_1 des getroffenen Stabes erforderlich. Dieselbe ist nach der Annahme in Nr. 311:
$$m_1 = \mu\int\frac{z^2}{\delta^2}F dx,$$
wenn μ die specifische Masse des Stabes und z diejenige Durchbiegung eines beliebigen Punktes der elastischen Linie bedeutet, welche im Gleichgewichtszustande der Durchbiegung δ ihres in der Stosslinie liegenden Punktes entspricht.

Insbesondere bei constantem Querschnitte findet man, unter $M = \mu F l$ die wahre Masse des Stabes für seine wirksame Länge l verstanden,

wenn der Stab am einen Ende befestigt ist und am anderen, freien Ende gestossen wird (cf. Nr. 54):
$$m_1 = \frac{33}{4\,.\,35}M = 0{,}236\,M;$$
wenn er beiderseits lose gestützt ist und in den Abständen a, b von den Enden gestossen wird (cf. Nr. 78):
$$m_1 = \frac{M}{3\,.\,35}\left(35 + 14\frac{a^3+b^3}{abl} + 2\frac{a^5+b^5}{a^2b^2l}\right),$$
$$\text{insbesondere für } a = b = \frac{l}{2}: \quad m_1 = \frac{17}{35}M = 0{,}486M;$$
wenn er beiderseits unter den Richtungswinkeln = Null eingeklemmt ist und in den Abständen a, b von den Enden gestossen wird (cf. Nr. 61):
$$m_1 = \frac{M}{4\,.\,35}\left(33 + 16\frac{a^3+b^3}{abl} + 3\frac{a^5+b^5}{a^2b^2l}\right),$$
$$\text{insbesondere für } a = b = \frac{l}{2}: \quad m_1 = \frac{13}{35}M = 0{,}371\,M.$$

324. — Eine Biegungsarbeit ist u. A. auch dann zu verrichten, wenn es sich darum handelt, einen stab- oder bandförmigen elastischen Körper auf einen Cylinder aufzuwickeln. Diese Arbeit A kann nach Nr. 319:
$$= \frac{1}{2E}\int\sigma^2 dV = \frac{E}{2}\int\varepsilon^2 dV$$
und dabei, wenn r der Radius des Cylinders, bis zur Mittellinie des aufgewickelten Körpers gerechnet, und l die Länge des letzteren ist,
$$\varepsilon = \frac{\eta}{r};\ dV = l dF$$
gesetzt werden, indem in allen Punkten eines bandförmigen Elementes, dessen Querschnitt ein der Biegungsaxe im Abstande η paralleler Flächenstreifen dF des constanten Querschnitts F ist, dieselbe Ausdehnung ε hervorgerufen wird. Damit wird:
$$A = \frac{El}{2r^2}\int\eta^2 dF = \frac{EJl}{2r^2}.$$

Wenn z. B. ein unter der Spannung P stehendes Seil auf eine Trommel gewunden wird, so ist die der aufgewundenen Seillänge l entsprechende Nutzarbeit $= Pl$, also der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch den Biegungswiderstand (die sogenannte Steifigkeit des Seils):

$$\frac{A}{Pl} = \frac{EJ}{2Pr}.$$

Derselbe giebt sich durch eine gewisse Absperrung $= a$ des Seils an der Aufwickelungsstelle zu erkennen, wofür man hat:

$$\frac{Pl + A}{Pl} = \frac{r+a}{r}; \quad a = \frac{EJ}{2Pr}.$$

Wird das Seil über eine Leitrolle hinübergebogen, so wird (vollkommene Elasticität vorausgesetzt) die vorher aufgewendete Biegungsarbeit bei der Abwickelung wieder ausgegeben, indem auch hier die Absperrung a eintritt. —

Wenn die Versuche lehren, dass die Steifigkeit der Seile anderen Gesetzen folgt, die nur eine empirische Bestimmung zulassen, so liegt der Grund hauptsächlich in ihrer discontinuirlichen Beschaffenheit, welche eine gegenseitige Verschiebung der einzelnen Fäden oder Drähte und infolge dessen einen Reibungswiderstand bedingt, der anderen Gesetzen folgt, wie der Biegungswiderstand eines stetigen Stabes, und welcher namentlich auch nicht nur bei der Biegung des geraden, sondern nicht minder bei der Geradestreckung des gebogenen Seils überwunden werden muss.

e. Arbeit der Drehungs-Elasticität.

325. — Wenn ein gerader stabförmiger Körper, dessen Länge $= l$ und dessen constanter Querschnitt $= F$ sei, um seine als x-Axe angenommene Axe verdreht wird, so sind alle in Nr. 307 genannten Spannungen ausser τ_y und τ_z = Null, die letzteren aber gleich für gleich gelegene Punkte aller Querschnitte. Ist also das Material des Stabes isotrop oder wenigstens der Art homogen, dass es gleich beschaffen ist nach allen Richtungen, welche mit der Stabaxe gleiche Winkel bilden, so liefert die allgemeine Formel in Nr. 307 mit

$$\tau_y = G\gamma_y; \ \tau_z = G\gamma_z; \ \tau_y^2 + \tau_z^2 = \tau^2; \ dV = l dF:$$

$$A = \frac{l}{2G}\int \tau^2 dF.$$

Dabei ist $dF = dy\,dz$, während für bestimmte Fälle τ^2 als Function von y und z nach früher entwickelten Formeln bestimmt werden kann.

Auch kann man die Resultate des fünften Capitels noch unmittelbarer verwerthen, indem man, unter M das die Drehung bewirkende Kraftmoment und unter ϑ den specifischen Drehungswinkel (Nr. 186) verstanden, analog dem in Nr. 320 zur Ermittelung der Biegungsarbeit eingeschlagenen Verfahren setzt:

$$A = \int_0^{\wedge} M\delta(l\vartheta)$$

oder mit $\vartheta = \omega \dfrac{M}{G}$: $A = \dfrac{M^2}{2G} l\omega$.

Mit Rücksicht auf die bekannte Beziehung zwischen M und der grössten Tangentialspannung t erhält man daraus diejenige Arbeit, welche bei gegebener grösster Anstrengung ein prismatischer Stab durch seine Verdrehung in sich aufzunehmen vermag.

Ist der Querschnitt eine Ellipse mit den Halbaxen b und c ($b \gtreqless c$), so ergiebt sich mit

$$t = \frac{2}{\pi}\frac{M}{b^2 c}; \quad \omega = \frac{1}{\pi}\frac{b^2+c^2}{b^3 c^3} \text{ (cf. Nr. 200 u. 204):}$$

$$A = \frac{t^2}{2G}\frac{\pi}{4}\frac{b}{c}(b^2+c^2)l = \frac{t^2}{2G}\frac{b^2+c^2}{4c^2}V;$$

insbesondere mit $b = c$ für eine cylindrische Welle:

$$A = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2G}V$$

und für eine hohle cylindrische Welle mit den Radien r und r_1 ($r > r_1$):

$$A = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2G}\pi r^2 l - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{r_1}{r}t\right)^2}{2G}\pi r_1^2 l = \frac{t^2}{2G}\frac{r^2+r_1^2}{2r^2}V.$$

Ist der Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten $2b$ und $2c$ ($b \leqq c$), so ergiebt sich mit

$$t = \frac{9}{16}\frac{M}{b^2 c}; \quad \omega = \frac{3\alpha}{16}\frac{b^2+c^2}{b^3 c^3} \text{ (cf. Nr. 199, 204 u. 206):}$$

$$A = \frac{t^2}{2G}\frac{16\alpha}{27}\frac{b}{c}(b^2+c^2)l = \frac{t^2}{2G}\frac{4\alpha}{27}\frac{b^2+c^2}{c^2}V.$$

Dabei ist $\alpha = 1{,}2$ bis $1{,}5$ zu setzen; mit dem Mittelwerthe $\alpha = 1{,}35$ ist:

$$A = \frac{t^2}{2G}\frac{b^2+c^2}{5c^2}V. —$$

Für ein isotropes Material ist mit

$$t = \frac{m}{m+1}k; \quad G = \frac{1}{2}\frac{m}{m+1}E \text{ (cf. Nr. 169):}$$

$$\frac{t^2}{2G} = \frac{2m}{m+1}\frac{k^2}{2E} = \left(\frac{3}{2} \text{ bis } \frac{8}{5}\right)\frac{k^2}{2E}$$

und es würde also z. B. für die cylindrische Röhre $A = \frac{k^2}{2E}V$ sein, d. h. dieselbe bei gleicher Anstrengung eine eben so grosse Arbeit durch Verdrehung um ihre Axe wie durch Ausdehnung nach deren Richtung in sich aufnehmen können, wenn $\frac{r}{r_1} = \sqrt{m}$ wäre.

II. Plattenförmiger Körper.

326. — Als Beispiel werde eine unter innerem Ueberdrucke $= p$ pro Flächeneinheit stehende Röhre betrachtet; r_1 sei der innere, r_2 der äussere Radius, l die Länge. Die Röhre sei an den Enden offen und frei (Nr. 272 u. ff.); dann sind mit Benutzung der in Nr. 270 erklärten Bezeichnungen die Tangentialspannungen und die Normalspannung $\sigma_a =$ Null,

und es ist die Arbeit der inneren Kräfte nach Nr. 309, ein isotropes Material vorausgesetzt:

$$A = \frac{1}{2E}\int_{r_1}^{r_2}\left(\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \frac{2}{m}\sigma_r\sigma_\varphi\right)dV.$$

Darin ist nach Nr. 272 mit $p_1 = p$, $p_2 = 0$:

$$\sigma_r = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right);\ \sigma_\varphi = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right)$$

und die Ausführung der Integration nach Substitution dieser Ausdrücke nebst $dV = 2\pi r l . dr$ liefert:

$$A = \frac{p^2}{E}\,\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\,\frac{(m-1)r_1^2 + (m+1)r_2^2}{m(r_2^2 - r_1^2)}V;\ V = \pi(r_2^2 - r_1^2)l.$$

Ist das Material von solcher Art, dass nicht etwa k'' wesentlich $< k'$ ist, so findet nach Nr. 273 die gefährlichste Anstrengung (eine positive oder Ausdehnung im engeren Sinne) an der Innenfläche nach der Umfangsrichtung statt, und es ist, wenn der entsprechende Maximalwerth von $E\varepsilon_\varphi = k$ gesetzt wird:

$$p = k\,\frac{m(r_2^2 - r_1^2)}{(m-1)r_1^2 + (m+1)r_2^2}.$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks für p erhält man die Arbeit, welche die Röhre bis zum Eintritt der Maximalanstrengung k in sich aufzunehmen vermag:

$$A = \frac{k^2}{E}\,\frac{m r_1^2}{(m-1)r_1^2 + (m+1)r_2^2}V;$$

ist die Wandstärke $\delta = r_2 - r_1$ verhältnissmässig klein, so kann dafür näherungsweise gesetzt werden:

$$A = \frac{k^2}{2E}\left(1 - \frac{m+1}{m}\,\frac{\delta}{r_1}\right)V.$$

327. — Wenn das in einer Röhre mit der Geschwindigkeit c fliessende Wasser plötzlich in seiner Bewegung gehemmt wird, so sucht es nach allen Seiten in radialer Richtung auszuweichen und übt auf die Röhre einen Stoss aus. Der Verlust an lebendiger Kraft in der ersten Periode des Stosses, d. h. bis zu dem Augenblicke, in welchem die radiale Geschwindigkeit der Innenfläche der Röhre der entsprechend verkleinerten Wassergeschwindigkeit gleich geworden ist, verbleibt dem Wasser als eine äquivalente Wärmemenge, und die als lebendige Kraft übrig gebliebene Wirkungsgrösse:

$$W = \frac{Q^2}{Q + \mu Q_1}\,\frac{c^2}{2g}\ \text{(cf. Nr. 313)},$$

unter Q das Gewicht der Wassersäule,

Q_1 „ „ „ Röhre von gleicher Länge l,

μQ_1 das auf die Innenfläche reducirte Gewicht Q

verstanden, wird wegen der geringen Zusammendrückbarkeit des Wassers fast ausschliesslich auf die Deformation der Röhre verwendet. Wenn von letzterer wie in Nr. 326 angenommen wird, dass sie sich sowohl der Länge nach frei zusammenziehen,*) als in allen Querschnitten ohne äusseres Hinderniss erweitern

*) Diese durch $\sigma_s = 0$ charakterisirte Voraussetzung ist ungünstiger, als die Annahme

könne, und wenn (cf. Nr. 270 u. ff.) ϱ und ϱ_1 die radialen Verrückungen der materiellen Punkte in den Abständen r und r_1 von der Axe sind, endlich q_1 das specifische Gewicht (Gewicht der Volumeneinheit) der Röhre ist, so ergiebt sich der Reductionscoefficient μ aus der Gleichung:

$$\mu Q_1 = \int_{r_1}^{r_2} q_1 . 2\pi r l . dr \left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^2$$

mit $Q = q_1 \pi (r_2^2 - r_1^2) l$ und mit Rücksicht darauf, dass nach Nr. 272 (mit $p_1 = p$, $p_2 = 0$):

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{\frac{b}{2} r + \frac{c}{r}}{\frac{b}{2} r_1 + \frac{c}{r_1}} = \frac{\frac{A}{m+1} r + \frac{B}{m-1} \frac{1}{r}}{\frac{A}{m+1} r_1 + \frac{B}{m-1} \frac{1}{r_1}} = \frac{(m-1) r + (m+1) \frac{r_2^2}{r}}{(m-1) r_1 + (m+1) \frac{r_2^2}{r_1}}$$

ist. So findet man:

$$\mu = \frac{r_1^2 \left[(m-1)^2 r_1^2 + (m-1)(5m+3) r_2^2 + 4(m+1)^2 \frac{r_2^4}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]}{2[(m-1) r_1^2 + (m+1) r_2^2]^2},$$

welcher Ausdruck sich vereinfacht zu

$$\mu = 1 - \frac{1}{m} \frac{\delta}{r_1},$$

wenn $\frac{\delta}{r_1}$ ein kleiner Bruch ist, dessen 2te Potenz gegen 1 vernachlässigt wird.

Ist nun q das specifische Gewicht des Wassers und $\frac{q_1}{q} = n$, so ist auch:

$$W = \frac{(\pi r_1^2 l)^2}{\pi r_1^2 l + n \mu \pi (r_2^2 - r_1^2) l} q \frac{c^2}{2g} = \frac{\pi r_1^4 l}{r_1^2 + n \mu (r_2^2 - r_1^2)} q \frac{c^2}{2g}$$

und die Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit dem von A (Nr. 326) liefert:

$$\frac{k^2}{E} = \frac{1}{m} \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{(m-1) r_1^2 + (m+1) r_2^2}{r_1^2 + n\mu (r_2^2 - r_1^2)} q \frac{c^2}{2g}.$$

Sofern den Grössen k und E das Centimeter als Längeneinheit zu Grunde liegt, bedeutet hier $q = 0{,}001$ Kil. das Gewicht von einem Cubikcentimeter Wasser und $\frac{c^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhe in Centimetern. Wird aber letztere in Metern, also mit $g = 9{,}81$ auch c in Metern pro Secunde ausgedrückt, so ist zu setzen:

$$q \frac{c^2}{2g} = 0{,}1 \frac{c^2}{2.9{,}81} = \frac{c^2}{196{,}2}.$$

Uebrigens ist es nicht blos die Wirkungsgrösse W, wodurch die resultirende Anstrengung der Röhre verursacht wird; denn indem der hydraulische Druck bei der Hemmung der Bewegung plötzlich in den hydrostatischen Druck übergeht, wird dadurch allein schon ein Werth von k bedingt, welcher nach Nr. 314 doppelt so gross ist, als derjenige, welcher der ruhigen Belastung durch den Ueberschuss des hydrostatischen Drucks über den hydraulischen Druck entsprechen würde, und welcher sich sonach zu demjenigen summirt, der infolge des permanenten hydraulischen Drucks in der Röhre schon vorhanden war, sowie zu demjenigen, welcher ausserdem durch die Wirkungsgrösse W hervorgerufen wird. Es ist des-

---

einer unveränderlichen Rohrlänge ($\varepsilon_a = 0$), und es wird dadurch einigermassen dem Umstande Rechnung getragen, dass durch ungleiche Erweiterung verschiedener Querschnitte eine vielleicht noch grössere Ausdehnung nach der Richtung der Länge eintreten könnte.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06718 4724